24 CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

El sensor de las bolsas de aire de automóvil es un capacitor: dos placas metálicas pequeñas casi juntas con cargas $+Q$ y $-Q$. Si el auto se detiene súbitamente, la placa trasera de menor masa se desplaza hacia la placa delantera, de mayor masa. Esto altera la capacitancia de las dos placas (la relación de Q respecto a la diferencia de potencial entre las placas). Los circuitos detectan este cambio y despliegan las bolsas de aire.

? Si las cargas $+Q$ y $-Q$ de las placas de un capacitor son constantes, ¿qué le ocurre a la diferencia de potencial entre las placas cuando éstas se aproximan una a la otra?

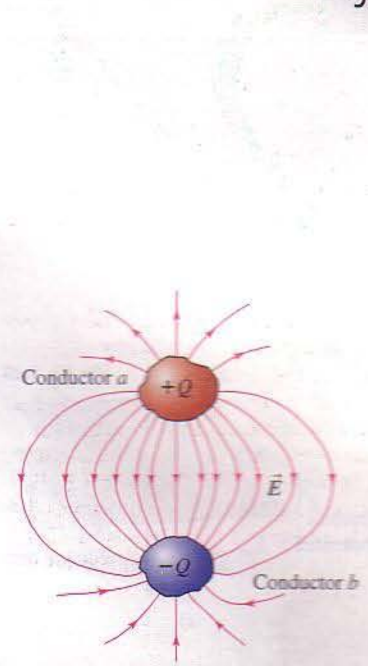
Cuando montamos una ratonera tradicional o tensamos de la cuerda de un arco, almacenamos energía mecánica en forma de energía potencial elástica. Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial *eléctrica* y carga eléctrica. Para hacer un capacitor, basta con aislar dos conductores uno del otro. Para guardar energía en este dispositivo, se transfiere carga de un conductor al otro de modo que uno tenga carga negativa, y el otro, una cantidad igual de carga positiva. Es necesario realizar trabajo para trasladar las cargas a través de la diferencia de potencial resultante entre los conductores, y el trabajo realizado se almacena en forma de energía potencial eléctrica.

Los capacitores tienen un número enorme de aplicaciones prácticas en dispositivos como unidades de destello electrónico para fotografía, láseres pulsantes, sensores de bolsas de aire para automóvil y receptores de radio y televisión. Encontraremos muchas de estas aplicaciones en capítulos posteriores (en particular en el capítulo 31, en el que veremos el papel crucial que los capacitores desempeñan en los circuitos de corriente alterna, de presencia tan extendida en nuestra sociedad tecnológica). De cualquier manera, en este capítulo haremos hincapié en las propiedades fundamentales de los capacitores. Con respecto a un capacitor en particular, la relación de la carga de cada conductor con relación a la diferencia de potencial entre los conductores es una constante, llamada *capacitancia*. La capacitancia depende del tamaño y forma de los conductores y del material aislante (en su caso) que está entre ellos. En comparación con el caso en el que sólo hay vacío entre los conductores, la capacitancia aumenta cuando está presente un material aislante (un *dieléctrico*). Esto ocurre porque se lleva a cabo una redistribución de la carga, llamada *polarización*, dentro del material aislante. El estudio de la polarización nos permitirá comprender mejor las propiedades eléctricas de la materia.

Los capacitores además nos proporciona otra manera de pensar en la energía potencial eléctrica. La energía almacenada en un capacitor con carga guarda relación con el campo eléctrico presente en el espacio entre los conductores. Veremos que la energía potencial eléctrica se puede considerar como almacenada *en el campo mismo*. La idea de que el campo eléctrico es en sí un almacén de energía se halla en el corazón de la teoría de las ondas electromagnéticas y de nuestra interpretación moderna de la naturaleza de la luz, la cual estudiaremos en el capítulo 32.

24.1 | Capacitores y capacitancia

Dos conductores cualesquiera separados por un aislador (o un vacío) forman un **capacitor** o condensador (Fig. 24.1). En casi todas las aplicaciones prácticas, cada conductor tiene inicialmente una carga neta de cero y se transfieren electrones de un conductor al otro; a esto se le denomina *cargar* el capacitor. De tal manera que los dos conductores tienen cargas de igual magnitud y signo opuesto, y la carga *neta* del capacitor en conjunto sigue siendo cero. En todo este capítulo supondremos que tal es el caso. Cuando decimos que un capacitor tiene una carga Q, o que hay una carga Q *almacenada* en el capacitor, queremos decir que el conductor que está al potencial más alto tiene una carga $+Q$, y el conductor al potencial más bajo tiene una carga $-Q$ (suponiendo que Q es positiva). Conviene tener esto en mente al leer la exposición y los ejemplos siguientes.



24.1 Dos conductores cualesquiera a y b aislados uno del otro forman un capacitor.

En los diagramas de circuitos los capacitores se representan mediante cualesquiera de estos símbolos:

En ambos símbolos las líneas verticales (rectas o curvas) representan los conductores, y las líneas horizontales representan los alambres conectados a uno u otro conductor. Una manera común de cargar un capacitor consiste en conectar estos dos alambres a bornes opuestos de una batería. Una vez que se establecen las cargas Q y $-Q$ en los conductores, se desconecta la batería. Esto proporciona una *diferencia de potencial* V_{ab} fija entre los conductores (es decir, el potencial del conductor con carga positiva a con respecto al conductor con carga negativa b) que es exactamente igual al voltaje de la batería.

El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud Q de la carga de cada conductor. Se sigue que la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores también es proporcional a Q. Si se duplica la magnitud de la carga en cada conductor, se duplica la densidad de carga en cada punto, el campo eléctrico en cada punto y la diferencia de potencial entre los conductores. Sin embargo, la *relación* de carga respecto a la diferencia de potencial no cambia. Esta relación se conoce como **capacitancia** C del capacitor:

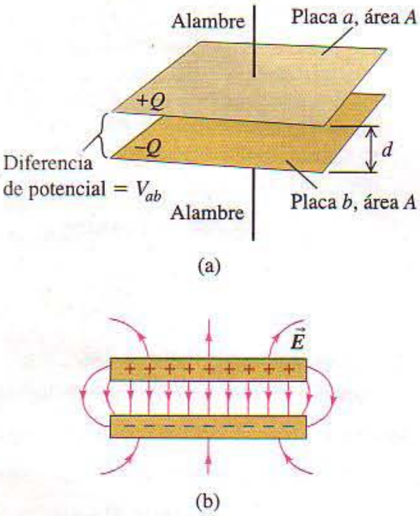
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad \text{(definición de capacitancia)} \qquad (24.1)$$

La unidad SI de la capacitancia es un **farad** (1 F), se le denomina así en honor del físico inglés del siglo XIX Michael Faraday. De acuerdo con la ecuación (24.1), un farad es igual a un *coulomb por volt* (1 C/V):

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

CUIDADO No confunda el símbolo *C* de capacitancia (que siempre se escribe en cursivas) con la abreviatura C de coulomb (que nunca se escribe en cursivas).

Cuanto mayor es la capacitancia C de un capacitor, tanto más grande es la magnitud Q de la carga en cualquiera de los conductores con una diferencia de potencial determinada V_{ab} y, en consecuencia, es mayor la cantidad de energía almacenada. (Recuerde que el potencial es energía potencial por unidad de carga). Así que, *la capacitancia es una medida del alcance de un capacitor para almacenar energía*. Veremos que el valor de la capacitancia depende sólo de la forma y el tamaño de los conductores y de la naturaleza del material aislante que los separa. (Los comentarios precedentes acerca de que la capacitancia es independiente de Q y V_{ab} no se aplican a cierta clase especial de materiales aislantes. De cualquier modo, no analizaremos esos materiales en este libro).



24.2 (a) Capacitor de placas paralelas cargado. (b) Cuando la separación de las placas es pequeña en comparación con su tamaño, el pestañeo del campo eléctrico $\vec{E}$ en las orillas es muy leve.

Cálculo de la capacitancia: capacitores en un vacío

Se calcula la capacitancia C de un determinado capacitor hallando la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores con una magnitud de carga Q dada y aplicando en seguida la ecuación (24.1). Por ahora consideraremos únicamente los *capacitores en un vacío*; es decir, supondremos que los conductores que constituyen el capacitor están separados por espacio vacío.

La forma más simple de un capacitor consiste en dos placas paralelas conductoras, cada una con un área A, separadas por una distancia d que es pequeña en comparación con sus dimensiones (Fig. 24.2a). Cuando las placas tienen carga, el campo eléctrico se localiza casi en su totalidad en la región comprendida entre las placas (Fig. 24.2b). Como se analizó en el ejemplo 22.8 (sección 22.4), el campo entre placas de este tipo es prácticamente *uniforme*, y las cargas de las placas están distribuidas uniformemente en sus superficies opuestas. A este arreglo se le llama **capacitor de placas paralelas**.

En el ejemplo 21.13 (sección 21.5) hallamos la magnitud del campo eléctrico E correspondiente a esta configuración aplicando el principio de sobreposición de campos eléctricos, y también en el ejemplo 22.8 (sección 22.4) mediante la ley de Gauss. Sería buena idea repasar esos ejemplos. Encontramos que $E = \sigma/\epsilon_0$, donde σ es la magnitud (valor absoluto) de la densidad de carga superficial en cada placa. Esto es igual al cociente de la magnitud de la carga total Q de cada placa entre el área A de la placa, o $\sigma = Q/A$, por lo que la magnitud del campo E se puede expresar como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

El campo es uniforme y la distancia entre las placas es d; por tanto, la diferencia de potencial (voltaje) entre las dos placas es

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

Esto nos dice que la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas en un vacío es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{24.2}$$

(capacitancia de un capacitor de placas paralelas en un vacío)

La capacitancia depende sólo de la geometría del capacitor; es directamente proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional a su separación d. Las cantidades A y d son constantes con respecto a un capacitor dado, y ϵ_0 es una constante universal. Por lo tanto, en un vacío la capacitancia C es una constante independiente de la carga del capacitor o de la diferencia de potencial entre las placas.

Cuando hay materia entre las placas, sus propiedades influyen en la capacitancia. Volveremos a este tema en la sección 24.4. Entre tanto, comentaremos que si

ActivPhysics ONLINE

11.11.6 Potencial eléctrico: introducción cualitativa

11.12.1 y 11.12.3 Potencial, campo y fuerza eléctricos el espacio contiene aire a la presión atmosférica en vez de vacío, la capacitancia difiere de lo que predice la ecuación (24.2) en menos de 0.06%.

En la ecuación (24.2), si A está en metros cuadrados y d en metros, C está en farads. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N{\cdot}m^2$; por tanto, vemos que

$$1\ \text{F} = 1\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m} = 1\ \text{C}^2/\text{J}$$

En vista de que $1\ \text{V} = 1\ \text{J/C}$ (energía por unidad de carga), esto es congruente con nuestra definición $1\ \text{F} = 1\ \text{C/V}$. Por último, las unidades de ϵ_0 se pueden expresar como $1\ \text{C}^2/\text{N}{\cdot}\text{m}^2 = 1\ \text{F/m}$; por tanto,

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$$

Esta relación es útil en los cálculos de capacitancia, y también nos ayuda a comprobar que la ecuación (24.2) es consistente en términos de dimensiones.

Un farad es una capacitancia muy grande, como lo muestra el ejemplo 24.1. En muchas aplicaciones las unidades más convenientes de capacitancia son el *microfarad* ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$) y el *picofarad* ($1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F}$). Por ejemplo, la fuente de energía de un radio de AM de corriente alterna contiene varios capacitores con capacitancias del orden de 10 o más microfarads, y las capacitancias de los circuitos sintonizadores son del orden de 10 a 100 picofarads.

Con respecto a *cualquier* capacitor en un vacío, la capacitancia C depende únicamente de la forma, dimensiones y separación de los conductores que constituyen el capacitor. Si los conductores tienen una forma más compleja que los del capacitor de placas paralelas, la expresión de la capacitancia es más complicada que la ecuación (24.2). En los ejemplos que siguen mostraremos cómo calcular C con otras dos geometrías de conductores.

Ejemplo 24.1 Tamaño de un capacitor de 1 F

Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 1.0 F. Si las placas están separadas a 1.00 mm, ¿cuál es el área de las placas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se tienen los valores de C y d correspondientes a un capacitor de placas paralelas; por tanto, se emplea la ecuación (24.2) y se resuelve para la variable objetivo: A.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (24.2), el área A es

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}} = 1.1 \times 10^{8}\ \text{m}^2$$

EVALUAR: ¡Esto corresponde a un cuadrado de aproximadamente 10 km de lado! Esta área es aproximadamente de una tercera parte más grande que la isla de Manhattan. Es evidente que no es éste un diseño muy práctico de un capacitor.

Hace tiempo se consideraba como una buena broma enviar a un ingeniero recién graduado al almacén por un capacitor de 1 farad. Esto ya no es tan gracioso como solía ser; ahora es posible fabricar capacitores de 1 F de unos pocos centímetros por lado. Una clase emplea gránulos de carbón activado, 1 gramo del cual tiene un área total aproximada de 1000 m^2.

Ejemplo 24.2 Propiedades de un capacitor de placas paralelas

Las placas de cierto capacitor de placas paralelas en un vacío están separadas 5.00 mm y tienen 2.00 m^2 de área. Se aplica una diferencia de potencial de 10,000 V (10.0 kV) entre los bornes del capacitor. Calcule a) la capacitancia; b) la carga de cada placa, y c) la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre las placas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se tienen los valores del área A de las placas y la separación d de éstas, los cuales se emplean en la ecuación (24.2) para hallar la capacitancia C. Después se encuentra la carga Q de cada placa con base en la diferencia de potencial V_{ab} dada y la ecuación (24.1). Una vez que se tiene Q, se halla el campo eléctrico entre las placas mediante la relación $E = Q/\epsilon_0 A$.

EJECUTAR: a) De acuerdo con la ecuación (24.2),

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m})(2.00\,\mathrm{m^2})}{5.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$
$$= 3.54 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} = 0.00354\,\mu\mathrm{F}$$

b) La carga del capacitor es

$$Q = CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/V})(1.00 \times 10^4\,\mathrm{V})$$
$$= 3.54 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} = 35.4\,\mu\mathrm{C}$$

La placa que está al potencial más alto tiene una carga de $+35.4\,\mu$C y la otra de $-35.4\,\mu$C.

c) La magnitud del campo eléctrico es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})(2.00\,\mathrm{m^2})}$$
$$= 2.00 \times 10^6\,\mathrm{N/C}$$

EVALUAR: Otra manera de obtener el resultado del inciso (c) es recordando que el campo eléctrico es igual, en términos de magnitud, al gradiente de potencial [ecuación (23.22)]. Dado que el campo entre las placas es uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1.00 \times 10^4\,\mathrm{V}}{5.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 2.00 \times 10^6\,\mathrm{V/m}$$

(Recuérdese que el newton por coulomb y el volt por metro son unidades equivalentes).

Ejemplo 24.3 Capacitor esférico

Dos corazas conductoras esféricas y concéntricas están separadas por un vacío. La coraza interior tiene una carga total $+Q$ y un radio exterior r_a, y la coraza exterior, una carga total $-Q$ y un radio interior r_b (Fig. 24.3). (La coraza interior está unida a la coraza exterior mediante varillas delgadas aislantes que tienen un efecto insignificante en la capacitancia). Halle la capacitancia de este capacitor esférico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste no es un capacitor de placas paralelas; por tanto, no se pueden emplear las relaciones deducidas con respecto a esa geometría en particular. En su lugar, conviene regresar a la definición fundamental de capacitancia: el cociente de la magnitud de la carga de cualquiera de los conductores entre la diferencia de potencial entre los conductores.

PLANTEAR: El campo eléctrico entre los conductores esféricos se halla con base en la ley de Gauss. A partir de este valor se determina la diferencia de potencial V_{ab} entre los dos conductores; en seguida se emplea la ecuación (24.1) para hallar la capacitancia $C = Q/V_{ab}$.

EJECUTAR: Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo 22.5 (sección 22.4), tomamos como superficie gaussiana una esfera de radio r entre las dos esferas y concéntrica con ellas. La ley de Gauss [ecuación (22.8)] establece que el flujo eléctrico a través de esta superficie es igual al cociente de la carga total encerrada dentro de la superficie entre ϵ_0:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\mathrm{enc}}}{\epsilon_0}$$

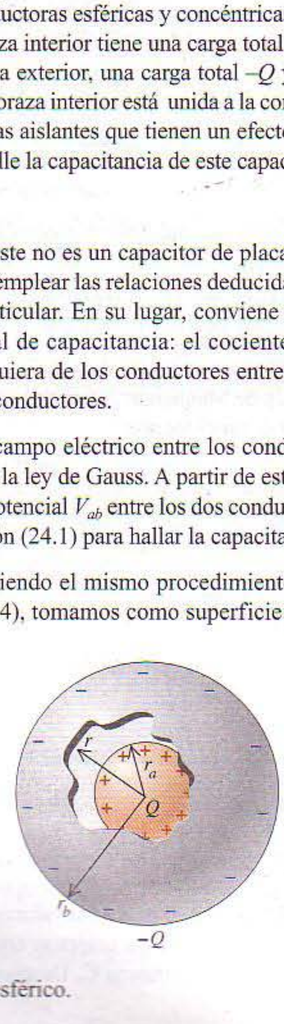
Por simetría, $\vec{E}$ es constante en términos de magnitud y paralelo a $d\vec{A}$ en todos los puntos de esta superficie; por tanto, la integral de la ley de Gauss es igual a $(E)(4\pi r^2)$. La carga total encerrada es $Q_{\mathrm{enc}} = Q$, así que,

$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El campo eléctrico entre las esferas es simplemente el debido a la carga de la esfera interior; la esfera exterior no tiene efecto alguno. En el ejemplo 22.5 hallamos que el campo producido por la carga de una esfera conductora es cero *adentro* de la esfera, lo que nos dice además que el conductor exterior no contribuye al campo entre los conductores.

La expresión anterior de E es la misma que la correspondiente a una carga puntual Q; por lo tanto, la expresión del potencial se puede tomar también como la misma que la correspondiente a una carga puntual: $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. Así pues, el potencial en el conductor interior (positivo) en $r = r_a$ con respecto al del conductor exterior (negativo) en $r = r_b$ es

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$



24.3 Capacitor esférico.

Por último, la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Como ejemplo, si $r_a = 9.5$ cm y $r_b = 10.5$ cm,

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m})\frac{(0.095\ \mathrm{m})(0.105\ \mathrm{m})}{0.010\ \mathrm{m}}$$

$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \mathrm{F} = 110\ \mathrm{pF}$$

EVALUAR: Podemos relacionar este resultado con la capacitancia de un capacitor de placas paralelas. La cantidad $4\pi r_a r_b$ es intermedia entre las áreas $4\pi r_a^2$ y $4\pi r_b^2$ de las dos esferas; de hecho, es la *media geométrica* de estas dos áreas, la cual podemos denotar como A_{mg}. La distancia entre las esferas es $d = r_b - r_a$, por lo que el resultado anterior se puede escribir también como $C = \epsilon_0 A_{mg}/d$. Esta forma es exactamente la misma que la correspondiente a placas paralelas: $C = \epsilon_0 A/d$. La conclusión es que si la distancia entre las esferas es muy pequeña en comparación con sus radios, aquéllas se comportan como placas paralelas con la misma área y espaciamiento.

Ejemplo 24.4 Capacitor cilíndrico

Un conductor cilíndrico largo tiene un radio r_a y una densidad de carga lineal λ. Está rodeado por una coraza conductora cilíndrica coaxial con un radio interior r_b y una densidad de carga lineal $-\lambda$ (Fig. 24.4). Calcule la capacitancia por unidad de longitud de este capacitor, suponiendo que hay un vacío en el espacio entre los cilindros.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Como en el ejemplo 24.3, se aplica la definición fundamental de capacitancia. Primero se halla la expresión de la diferencia de potencial V_{ab} entre los cilindros y la carga Q en un tramo de longitud L de los cilindros; después se halla la capacitancia de un tramo de longitud L mediante la ecuación (24.1). La variable que se busca es el cociente de esta capacitancia entre L.

EJECUTAR: Para hallar la diferencia de potencial entre los cilindros, se aprovecha un resultado que se obtuvo en el ejemplo 23.10 (sección 23.3), según el cual en un punto afuera de un cilindro con carga, a una distancia r del eje, el potencial debido al cilindro es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es el radio (arbitrario) en el que $V = 0$. Este mismo resultado es aplicable al potencial *entre* los cilindros del problema presente porque, de acuerdo con la ley de Gauss, la carga del cilindro exterior no contribuye al campo entre los cilindros (véase el ejemplo 24.3). En nuestro caso, tomamos el radio r_0 como r_b, el radio de la superficie interna del cilindro exterior, de modo que el cilindro conductor exterior está a $V = 0$. Por lo tanto el potencial de la superficie externa del cilindro interior (donde $r = r_a$) es simplemente igual al potencial V_{ab} del cilindro interior (positivo) a con respecto al cilindro exterior (negativo) b, o

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Esta diferencia de potencial es positiva (suponiendo que λ es positiva, como en la figura 24.4) porque el cilindro interior está a un potencial más alto que el exterior.

La carga total Q en un tramo de longitud L es $Q = \lambda L$; por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (24.1) la capacitancia C de un tramo de longitud L es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$$

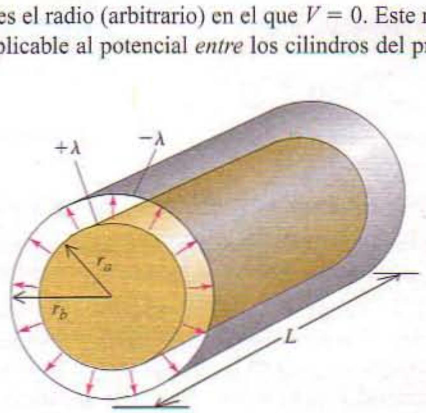
La capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$

Sustituyendo $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m $= 8.85$ pF/m se obtiene

$$\frac{C}{L} = \frac{55.6\ \mathrm{pF/m}}{\ln(r_b/r_a)}$$

EVALUAR: Vemos que la capacitancia de los cilindros coaxiales está determinada en su totalidad por las dimensiones, tal como ocurre en el caso de las placas paralelas. Los cables coaxiales ordinarios se fabrican así, aunque con un material aislante en vez de vacío entre el conductor interior y el exterior. Un cable típico para antenas de televisión y conexiones de videograbadora tiene una capacitancia por unidad de longitud de 69 pF/m.



24.4 Capacitor cilíndrico largo. En esta figura se supone que la densidad de carga lineal λ es positiva. La magnitud de la carga en un tramo de longitud L de cualquiera de los cilindros es λL.

Evalúe su comprensión

Si se duplica la cantidad de carga de un capacitor, ¿cómo cambia la capacitancia? ¿Depende su respuesta del tamaño o forma de los conductores que constituyen el capacitor? (Suponga que sólo hay vacío entre los conductores).

24.2 | Capacitores en serie y en paralelo

Los capacitores se fabrican con ciertas capacitancias estándar y tensiones que pueden soportar con seguridad (Fig. 24.5). Sin embargo, estos valores estándar pueden no ser los que uno necesita realmente en una aplicación específica. Para obtener los valores necesarios se combinan capacitores. Son muchas las combinaciones posibles, pero las más sencillas son la conexión en serie y la conexión en paralelo.

24.5 Colección de capacitores disponibles en el comercio.

Capacitores en serie

La figura 24.6a es un diagrama esquemático de una **conexión en serie**. Dos capacitores se conectan en serie (uno en seguida del otro) mediante alambres conductores entre los puntos a y b. Ambos capacitores están inicialmente sin carga. Cuando se aplica una diferencia de potencial V_{ab} positiva y constante entre los puntos a y b, los capacitores se cargan; la figura muestra que la carga de *todas* las placas conductoras tiene la misma magnitud. Para entender por qué, dése cuenta primero que la placa superior de C_1 adquiere una carga positiva Q. El campo eléctrico de esta carga positiva atrae carga negativa hacia la placa inferior de C_1 hasta que todas las líneas de campo que comienzan en la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello es necesario que la placa inferior tenga una carga $-Q$. Estas cargas negativas vinieron de la placa superior de C_2, la cual se carga positivamente con la carga $+Q$. Esta carga positiva atrae entonces la carga negativa $-Q$ de la conexión en el punto b hacia la placa inferior de C_2. La carga total de la placa inferior de C_1 y de la placa superior de C_2, en conjunto, debe ser siempre cero porque estas placas sólo están conectadas una con otra y con nada más. De esta manera, *en una conexión en serie la magnitud de la carga de todas las placas es la misma*.

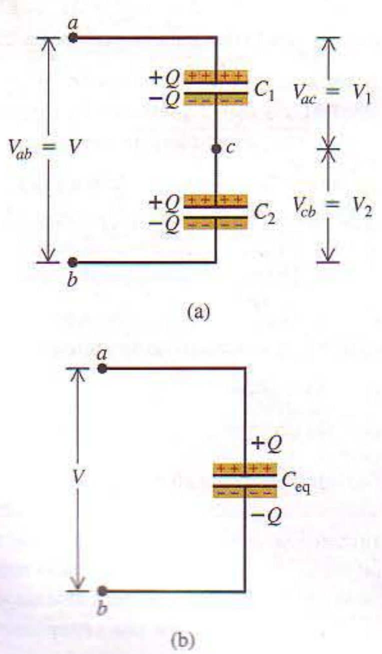
Remitiéndonos una vez más a la figura 24.6a, podemos escribir las diferencias de potencial entre los puntos a y c, c y b y a y b como

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

y, por consiguiente,

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{24.3}$$



24.6 (a) Dos capacitores en serie y (b) el capacitor equivalente.

Siguiendo una convención común, se emplean los símbolos V_1, V_2 y V para denotar las *diferencias* de potencial V_{ac} (entre los bornes del primer capacitor), V_{cb} (entre los bornes del segundo capacitor) y V_{ab} (entre los bornes de la combinación total de capacitores), respectivamente.

La **capacitancia equivalente** C_{eq} de la combinación en serie se define como la capacitancia de un *solo* capacitor cuya carga Q es la misma que la de la combinación, cuando la diferencia de potencial V es la misma. En otras palabras, la combinación se puede sustituir por un *capacitor equivalente* de capacitancia C_{eq}. Con respecto a un capacitor de esta índole, como el que se muestra en la figura 24.6b,

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{o} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \tag{24.4}$$

Combinando las ecuación (24.3) y (24.4) se obtiene

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Este análisis se puede hacer extensivo a cualquier número de capacitores en serie. Se obtiene el resultado siguiente con respecto al *recíproco* de la capacitancia equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad \text{(capacitores en serie)} \qquad (24.5)$$

El recíproco de la capacitancia equivalente de una combinación en serie es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. En una conexión en serie, la capacitancia equivalente siempre es *menor que* cualquiera de las capacitancias individuales.

CUIDADO La magnitud de la carga es la misma en todas las placas de los capacitores de una combinación en serie; sin embargo, las diferencias de potencial de los capacitores individuales no son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. La suma de las diferencias de potencial de los capacitores individuales es la diferencia de potencial total entre los bornes de la combinación en serie: $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$.

Capacitores en paralelo

El arreglo que se muestra en la figura 24.7a se conoce como una **conexión en paralelo**. Dos capacitores están conectados en paralelo entre los puntos a y b. En este caso las placas superiores de los dos capacitores están conectadas mediante alambres conductores para formar una superficie equipotencial y las placas inferiores forman otra. Por tanto, *en una conexión en paralelo la diferencia de potencial de todos los capacitores individuales es la misma* e igual a $V_{ab} = V$. De cualquier manera, las cargas Q_1 y Q_2 no son necesariamente iguales puesto que pueden llegar cargas a cada capacitor de modo independiente desde la fuente (como una batería) del voltaje V_{ab}. Las cargas son

$$Q_1 = C_1V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2V$$

La carga *total* Q de la combinación, y de este modo la carga total del capacitor equivalente, es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

Por consiguiente,

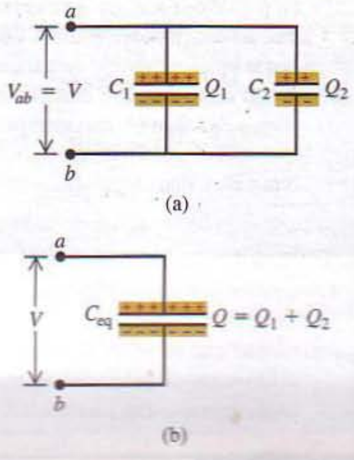
$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \qquad (24.6)$$

La combinación en paralelo es equivalente a un solo capacitor con la misma carga total $Q = Q_1 + Q_2$ y diferencia de potencial V que la combinación (Fig. 24.7b). La capacitancia equivalente de la combinación, C_{eq}, es igual que la capacitancia Q/V de este único capacitor equivalente. Así que, de acuerdo con la ecuación (24.6),

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

De igual modo se demuestra que, con respecto a cualquier número de capacitores en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad \text{(capacitores en paralelo)} \qquad (24.7)$$



24.7 (a) Dos capacitores en paralelo y (b) el capacitor equivalente.

La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo es igual a la *suma* de las capacitancias individuales. En una conexión en paralelo la capacitancia equivalente siempre es *mayor que* cualquiera de las capacitancias individuales.

CUIDADO Las diferencias de potencial son las mismas en todos los capacitores de una combinación en paralelo; no obstante, las cargas de los capacitores individuales no son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las cargas de los capacitores individuales se suman para dar la carga total de la combinación en paralelo: $Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$. [Compare estos enunciados con los del párrafo de "cuidado" enseguida de la ecuación (24.5)].

Estrategia para resolver problemas

Capacitancia equivalente

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* El concepto de capacitancia equivalente resulta útil siempre que se conectan dos o más capacitores entre sí.

PLANTEAR *el problema utilizando las siguientes etapas:*

1. Haga un dibujo del arreglo de capacitores.
2. Identifique si los capacitores están conectados en serie o en paralelo. En el caso de combinaciones más complicadas, a veces es posible identificar partes que son conexiones simples en serie o en paralelo.
3. Tenga en mente que cuando se afirma que un capacitor tiene una carga Q, ello siempre quiere decir que la placa que está al potencial más alto tiene una carga $+Q$, y la otra placa, una carga $-Q$.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Cuando los capacitores están conectados en serie, como en la figura 24.6a, siempre tienen la misma carga, suponiendo que carecían de ella antes de ser conectados. Las diferencias de potencial *no* son iguales a menos que las capacitancias sean las mismas. La diferencia de potencial total entre los bornes de la combinación es la suma de las diferencias de potencial individuales.
2. Cuando los capacitores están conectados en paralelo, como en la figura 24.7a, la diferencia de potencial V siempre es la misma en todos los capacitores individuales. Las cargas de los capacitores individuales *no* son iguales a menos que las capacitancias sean las mismas. La carga total de la combinación es la suma de las cargas individuales.
3. En el caso de combinaciones más complicadas, halle las partes que sean conexiones simples en serie o en paralelo y sustitúyalas por sus capacitancias individuales, mediante una reducción etapa por etapa. Si después de esto necesita hallar la carga o la diferencia de potencial de algún capacitor individual, es posible que deba volver sobre su trayectoria hasta los capacitores originales.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su resultado sea razonable. Si los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente C_{eq} debe ser *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales. En cambio, si los capacitores están conectados en paralelo, C_{eq} debe ser *mayor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

Ejemplo 24.5

Capacitores en serie y en paralelo

En las figuras 24.6 y 24.7, sean $C_1 = 6.0\ \mu F$, $C_2 = 3.0\ \mu F$ y $V_{ab} = 18$ V. Halle la capacitancia equivalente, y además la carga y la diferencia de potencial de cada capacitor cuando ambos están conectados a) en serie y b) en paralelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En ambos incisos, una de las variables que se busca es la capacitancia equivalente. En el caso de la combinación en serie del inciso (a), está dada por la ecuación (24.5); en el de la combinación en paralelo del inciso (b), C_{eq} está dada por la ecuación (24.6). En cada inciso se halla la carga y la diferencia de potencial con base en la definición de capacitancia [ecuación (24.1)] y las reglas descritas en la Estrategia para resolver problemas.

EJECUTAR: a) Utilizando la ecuación (24.5) de la capacitancia equivalente de la combinación en serie (Fig. 24.6a), se encuentra que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0\ \mu F} + \frac{1}{3.0\ \mu F} \qquad C_{eq} = 2.0\ \mu F$$

La carga Q de cada capacitor en serie es igual a la carga del capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq}V = (2.0\ \mu F)(18\ V) = 36\ \mu C$$

La diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor es inversamente proporcional a su capacitancia:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\ \mu C}{6.0\ \mu F} = 6.0\ V$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\ \mu C}{3.0\ \mu F} = 12.0\ V$$

b) Para hallar la capacitancia equivalente de la combinación en paralelo (Fig. 24.7a) se aplica la ecuación (24.6):

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0\ \mu F + 3.0\ \mu F = 9.0\ \mu F$$

La diferencia de potencial entre los bornes de cada uno de los dos capacitores en paralelo es igual que la correspondiente al capacitor equivalente: 18 V. Las cargas Q_1 y Q_2 son directamente proporcionales a las capacitancias C_1 y C_2, respectivamente:

$$Q_1 = C_1V = (6.0\ \mu F)(18\ V) = 108\ \mu C$$
$$Q_2 = C_2V = (3.0\ \mu F)(18\ V) = 54\ \mu C$$

EVALUAR: Dese cuenta que la capacitancia equivalente C_{eq} de la combinación en serie del inciso (a) es en efecto menor que C_1 o C_2, en tanto que en la combinación en paralelo del inciso (b) la capacitancia equivalente es efectivamente mayor que C_1 o C_2.

Resulta instructivo comparar las diferencias de potencial y las cargas en cada inciso del ejemplo. En el caso de dos capacitores en serie, como en el inciso (a), la carga es la misma en cada capacitor y la diferencia de potencial *más grande* aparece entre los bornes del capacitor con *menor* capacitancia. Además, $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab} = 18$ V, como debe ser. En cambio, en el caso de dos capacitores en paralelo, como en el inciso (b), cada capacitor tiene la misma diferencia de potencial, y la carga *más grande* aparece en el capacitor de *mayor* capacitancia. ¿Puede usted demostrar que la carga total $Q_1 + Q_2$ de la combinación en paralelo es igual a la carga total $Q = C_{eq}V$ del capacitor equivalente?

Ejemplo 24.6 Red de capacitores

Halle la capacitancia equivalente de la combinación que se muestra en la figura 24.8a.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Los cinco capacitores de la figura 24.8a no están ni todos en serie ni todos en paralelo. Sin embargo, podemos identificar partes del arreglo que *están* ya sea en serie o en paralelo, las cuales combinaremos para hallar la capacitancia equivalente neta.

EJECUTAR: Primero se sutituye la combinación en serie de 12 μF y 6 μF por su capacitancia equivalente; llamando a ésta C', aplicamos la ecuación (24.5):

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} \qquad C' = 4\ \mu F$$

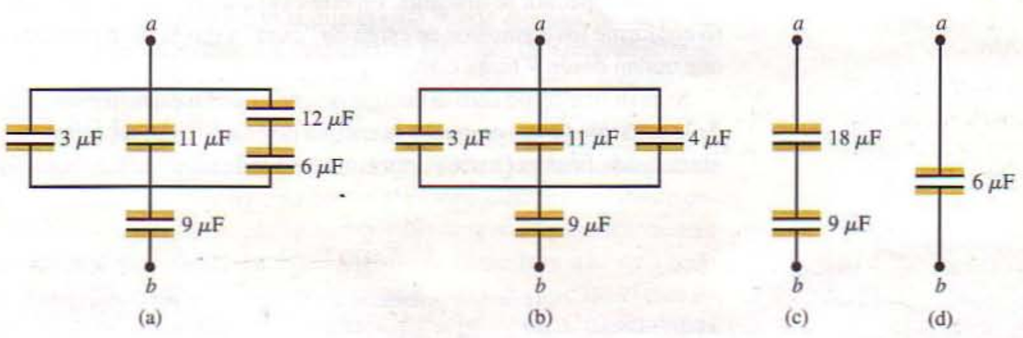
Esto nos da la combinación equivalente que se muestra en la figura 24.8b. A continuación se halla la capacitancia equivalente de los tres capacitores en paralelo aplicando la ecuación (24.7). Llamando a su capacitancia equivalente C'', tenemos que

$$C'' = 3\ \mu F + 11\ \mu F + 4\ \mu F = 18\ \mu F$$

Esto nos da la combinación equivalente más simple que se muestra en la figura 24.8c. Por último, se halla la capacitancia equivalente C_{eq} de estos dos capacitores en serie (Fig. 24.8d):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\ \mu F} + \frac{1}{9\ \mu F} \qquad C_{eq} = 6\ \mu F$$

EVALUAR: La capacitancia equivalente de la red es de 6 μF; es decir, si se aplica una diferencia de potencial V_{ab} entre los bornes de la red, la carga neta de la red es el producto de 6 μF por V_{ab}. ¿Cuál es la relación entre esta carga neta y las cargas de los capacitores individuales de la figura 24.8a? (Véase el ejercicio 24.20).



24.8 (a) Red de capacitores entre los puntos a y b. (b) Los capacitores de 12 μF y 6 μF en serie de (a) se sustituyen por un capacitor equivalente de 4 μF. (c) Los capacitores de 3 μF, 11 μF y 4 μF en paralelo de (b) se sustituyen por un capacitor equivalente de 18 μF. Finalmente, los capacitores de 18μ F y 9μ F en serie en (c) son remplazados por un capacitor equivalente 6 μF.

Evalúe su comprensión

Si se conectan en paralelo un capacitor de 4 μF y un capacitor de 8 μF, ¿cuál de ellos tiene la diferencia de potencial más grande entre sus bornes? ¿Cuál tiene la carga más grande?

24.3 | Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

Muchas de las aplicaciones más importantes de los capacitores dependen de su alcance para almacenar energía. La energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor cargado es simplemente igual a la cantidad de trabajo que se necesitó para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en conductores diferentes. Cuando se descarga el capacitor, esta energía almacenada se recupera en forma de trabajo realizado por fuerzas eléctricas.

La energía potencial U de un capacitor cargado se halla calculando el trabajo W que se necesitó para cargarlo. Supóngase que al terminar de cargar el capacitor la carga final es Q y la diferencia de potencial final es V. De acuerdo con la ecuación (24.1), estas cantidades se relacionan como sigue:

$$V = \frac{Q}{C}$$

Sean q y v la carga y la diferencia de potencial, respectivamente, en una etapa intermedia del proceso de carga; entonces $v = q/C$. En esta etapa, el trabajo dW que se requiere para transferir un elemento de carga adicional dq es

$$dW = v\,dq = \frac{q\,dq}{C}$$

El trabajo total W que se necesita para aumentar la carga q del capacitor de cero a un valor final Q es

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C} \qquad (24.8)$$

(trabajo para cargar un capacitor)

Esto también es igual al trabajo total que el campo eléctrico realiza sobre la carga cuando el capacitor se descarga. En este caso q *disminuye* de un valor inicial Q a cero conforme los elementos de carga dq "caen" a través de diferencias de potencial v que varían desde V hasta cero.

Si se define como cero la energía potencial de un capacitor *sin carga*, entonces W de la ecuación (24.8) es igual a la energía potencial U del capacitor cargado. La carga almacenada final es $Q = CV$; por tanto, se puede expresar U (que es igual a W) como

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (24.9)$$

(energía potencial almacenada en un capacitor)

Cuando Q está en coulombs, C en farads (coulombs por volts) y V en volts (joules por coulombs), U está en joules.

La forma final de la ecuación (24.9), $U = \frac{1}{2}QV$, muestra que el trabajo total que se requiere para cargar el capacitor es igual a la carga total multiplicada por la diferencia de potencial *promedio* $\frac{1}{2}V$ durante el proceso de carga.

La expresión $U = \frac{1}{2}(Q^2/C)$ de la ecuación (24.9) muestra que el capacitor cargado es el análogo eléctrico de un resorte estirado, cuya energía potencial elástica es $U = \frac{1}{2}kx^2$. La carga Q es análoga al alargamiento x, y el *recíproco* de la capacitancia, $1/C$, es análogo a la constante de fuerza k. La energía que se suministra a un capacitor durante el proceso de carga es análoga al trabajo que se realiza sobre un resorte para alargarlo.

Las ecuaciones (24.8) y (24.9) nos dicen que la capacitancia mide la facultad de un capacitor para almacenar tanto energía como carga. Si se carga un capacitor conectándolo a una batería o a otra fuente que suministre una diferencia de potencial fija V, entonces un aumento en el valor de C proporciona una carga mayor $Q = CV$ y una cantidad más grande de energía almacenada $U = \frac{1}{2}CV^2$. En cambio, si lo que se busca es transferir una cantidad de carga determinada Q de un conductor a otro, la ecuación (24.8) muestra que el trabajo W que se requiere es inversamente proporcional a C; cuando más grande es la capacitancia, tanto más fácil es proporcionarle a un capacitor una cantidad fija de carga.

24.9 Una unidad de destello electrónico almacena energía potencial en un capacitor. Al oprimir el botón del obturador de la cámara se crea un camino conductor de una placa del capacitor a la otra a través de la lámpara de destellos. Una vez que se establece este camino y el capacitor se descarga, la energía almacenada se convierte en un destello luminoso breve aunque intenso.

Casi todas las aplicaciones prácticas de los capacitores aprovechan su capacidad para almacenar y liberar energía. En las unidades de destello electrónico que utilizan los fotógrafos y en las unidades de almacenamiento de energía para láseres pulsantes, la energía y la carga almacenadas en un capacitor se recuperan rápidamente (Fig. 24.9). En otras aplicaciones la energía se libera con más lentitud. Por ejemplo, los resortes de la suspensión de un automóvil contribuyen a hacer más suave la marcha absorbiendo la energía de las sacudidas bruscas y liberándola gradualmente; de manera análoga, un capacitor en un circuito electrónico puede amortiguar las variaciones indeseables de voltaje debidas a oleadas de corriente. Y así como la presencia de un resorte proporciona a un sistema mecánico una frecuencia natural a la cual responde con la máxima intensidad a una fuerza periódica aplicada, así también la presencia de un capacitor proporciona a un circuito eléctrico una frecuencia natural con respecto a las oscilaciones de corriente. Esta idea se utiliza en los circuitos sintonizados, como los de los receptores de radio y televisión, los cuales responden a las señales transmitidas a una frecuencia en particular y pasan por alto las señales a otras frecuencias. Estudiaremos estos circuitos detenidamente en el capítulo 31.

Las propiedades de almacenamiento de energía de los capacitores tienen además ciertos efectos prácticos indeseables. Los soportes adyacentes del lado inferior de un *chip* de computadora actúan como un capacitor, y la propiedad que confiere utilidad a los capacitores para amortiguar las variaciones de voltaje tiene el efecto de retardar la rapidez con la que los potenciales de los soportes del *chip* puedan cambiar. Esta tendencia limita la rapidez con la que el *chip* puede efectuar cálculos, un efecto que adquiere mayor importancia a medida que los *chips* de computadora se hacen más pequeños y se les obliga a funcionar con rapidez cada vez mayor.

Energía del campo eléctrico

Se puede cargar un capacitor trasladando electrones directamente de una placa a otra. Para ello es necesario realizar trabajo contra el campo eléctrico existente entre las placas. De esta manera, se puede pensar que la energía está almacenada *en el campo* de la región comprendida entre las placas. A fin de formular esta relación, hallemos la energía *por unidad de volumen* en el espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas con área de placa A y separación d. Llamaremos a esto **densidad de energía**, y la denotaremos como u. De acuerdo con la ecuación (24.9) la energía potencial almacenada total es $\frac{1}{2}CV^2$ y el volumen entre las placas es simplemente Ad; por tanto, la densidad de energía es

$$u = \text{Densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \tag{24.10}$$

De acuerdo con la ecuación (24.2) la capacitancia C está dada por $C = \epsilon_0 A/d$. La diferencia de potencial V está relacionada con la magnitud del campo eléctrico E según $V = Ed$. Si empleamos estas expresiones en la ecuación (24.10), los factores geométricos A y d se cancelan y se obtiene

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \text{(densidad de energía eléctrica en un vacío)} \qquad (24.11)$$

Aunque hemos deducido esta relación sólo con respecto a un capacitor de placas paralelas, resulta ser válida con respecto a cualquier capacitor en un vacío y, de hecho, *a cualquier configuración de campo eléctrico en un vacío*. Este resultado tiene una consecuencia interesante. Pensamos que el vacío no contiene materia; pero el vacío pueden tener, no obstante, campos eléctricos y, por tanto, energía. Así pues, el espacio "vacío" no está necesariamente vacío a final de cuentas. Haremos uso de esta idea y de la ecuación (24.11) en el capítulo 32, en relación con la energía que las ondas electromagnéticas transportan.

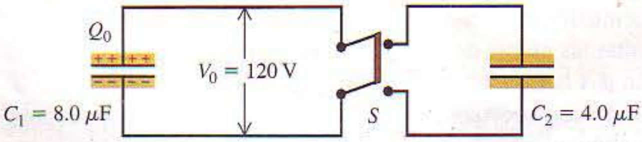
CUIDADO Es un error muy común pensar que la energía del campo eléctrico es una clase nueva de energía, diferente de la energía potencial eléctrica que ya se ha descrito. *No* es así; se trata simplemente de una manera diferente de interpretar la energía potencial eléctrica. Podemos considerar la energía de un sistema de cargas en particular como una propiedad compartida de todas las cargas, o bien pensar en la energía como una propiedad del campo eléctrico creado por las cargas. Ambas interpretaciones conducen al mismo valor de la energía potencial.

Ejemplo 24.7 Transferencia de carga y de energía entre capacitores

En la figura 24.10 se carga un capacitor de capacitancia $C_1 = 8.0\ \mu$F conectándolo a una fuente de diferencia de potencial $V_0 = 120$ V (que no se muestra en la figura). Inicialmente, el interruptor S está abierto. Una vez que se ha cargado C_1, se desconecta la fuente de diferencia de potencial. a) ¿Cuál es la carga Q_0 de C_1 si se deja abierto el interruptor S? b) ¿Cuál es la energía almacenada en C_1 si se deja abierto el interruptor S? c) El capacitor de capacitancia $C_2 = 4.0\ \mu$F está inicialmente sin carga. Después de cerrar el interruptor S, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor, y cuál es la carga de cada capacitor? d) ¿Cuál es la energía total del sistema después de cerrar el interruptor S?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al principio se tiene un solo capacitor con cierta diferencia de potencial entre sus placas. Después de cerrar el interruptor, un alambre conecta las placas superiores de los dos capacitores y otro alambre conecta las placas inferiores; en otras palabras, los capacitores quedan conectados en paralelo.



24.10 Cuando se cierra el interruptor S, el capacitor cargado C_1 se conecta a un capacitor sin carga C_2. La parte central del interruptor es una manija aislante; la carga sólo puede fluir entre los dos bornes superiores y entre los dos bornes inferiores.

PLANTEAR: En los incisos (a) y (b) se halla la carga y la energía almacenada del capacitor C_1 mediante las ecuaciones (24.1) y (24.9), respectivamente. En el inciso (c) se utiliza el carácter de la conexión en paralelo para determinar cómo se comparte la carga Q_0 entre los dos capacitores. En el inciso (d) se emplea de nuevo la ecuación (24.9) para hallar la energía almacenada en los capacitores C_1 y C_2; la energía total es la suma de estos valores.

EJECUTAR: a) La carga Q_0 de C_1 es

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8.0\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 960\ \mu\text{C}$$

b) La energía almacenada inicialmente en el capacitor es

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}Q_0 V_0 = \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(120\ \text{V}) = 0.058\ \text{J}$$

c) Cuando se cierra el interruptor, la carga positiva Q_0 se distribuye en las placas superiores de ambos capacitores, y la carga negativa $-Q_0$ en las placas inferiores de los dos capacitores. Sean Q_1 y Q_2 las magnitudes respectivas de las cargas finales de los dos capacitores. Por la conservación de la carga,

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

En el estado final, cuando las cargas ya no se trasladan, las dos placas superiores se hallan al mismo potencial; están conectadas por un alambre conductor y, en consecuencia, forman una sola superficie equipotencial. Las dos placas inferiores también se encuentran al mismo potencial, diferente del de las placas superiores. La diferencia de potencial final V entre las placas es, por consiguiente, la misma en ambos capacitores, como es de esperar en el caso de una conexión en paralelo. Las cargas de los capacitores son

$$Q_1 = C_1V \qquad Q_2 = C_2V$$

Cuando se combina esto con la ecuación anterior de la conservación de la carga, se obtiene

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu\text{C}}{8.0\ \mu\text{F} + 4.0\ \mu\text{F}} = 80\ \text{V}$$

$$Q_1 = 640\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 320\ \mu\text{C}$$

d) La energía final del sistema es la suma de las energías almacenadas en cada capacitor:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2}Q_1V + \frac{1}{2}Q_2V = \frac{1}{2}Q_0V$$

$$= \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(80\ \text{V}) = 0.038\ \text{J}$$

EVALUAR: La energía final es menor que la energía original $U_{\text{inicial}} = 0.058$ J; la diferencia se ha transformado en energía de alguna otra forma. Los conductores se calientan un poco debido a su resistencia, y parte de la energía se irradia en forma de ondas electromagnéticas. Estudiaremos detenidamente el comportamiento de los capacitores en los circuitos en los capítulos 26 y 31.

Ejemplo 24.8 Energía del campo eléctrico

Suponga que desea almacenar 1.00 J de energía potencial eléctrica en un volumen de 1.00 m^3 en un vacío. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico que se requiere? b) Si la magnitud del campo es diez veces mayor, ¿cuánta energía se almacena por metro cúbico?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se utiliza la información dada para hallar la densidad de energía deseada u, y luego la ecuación (24.11) para encontrar el valor de E que se requiere. Esta misma ecuación proporciona la relación entre los cambios de E y los cambios correspondientes de u.

EJECUTAR: a) La densidad de energía deseada es $u = (1.00\ \text{J})/(1.00\ \text{m}^3) = 1.00\ \text{J/m}^3$. Se despeja E de la ecuación (24.11):

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00\ \text{J/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}}$$

$$= 4.75 \times 10^5\ \text{N/C} = 4.75 \times 10^5\ \text{V/m}$$

b) La ecuación (24.11) muestra que u es proporcional a E^2. Si E aumenta por un factor de 10, u aumenta por un factor de $10^2 = 100$, y la densidad de energía es 100 J/m^3.

EVALUAR: La magnitud del campo eléctrico hallada en el inciso (a) es considerable, pues corresponde a una diferencia de potencial de casi medio millón de volts a lo largo de una distancia de un metro. En la sección 24.4 veremos que las magnitudes de campo en los conductores prácticos pueden llegar a ser tan grandes como ésta o incluso mayores.

Ejemplo 24.9 Dos maneras de calcular la energía almacenada en un capacitor

El capacitor esférico descrito en el ejemplo 24.3 (sección 24.1) tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus conductores interior y exterior. Halle la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor a) utilizando en la capacitancia C calculada en el ejemplo 24.3 y b) integrando la densidad de energía del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: En el ejemplo 24.3 calculamos la capacitancia C y la magnitud del campo E entre los conductores. Se calculó la energía almacenada U en el inciso (a) utilizando la expresión de C de la ecuación (24.9). En el inciso (b) se halla la densidad de energía u del campo eléctrico entre los conductores a partir de la expresión de E de la ecuación (24.11). La magnitud del campo depende de la distancia r al centro del capacitor; así que u también depende de r. Por consiguiente, no se puede hallar U simplemente multiplicando u por el volumen entre los conductores, sino que es preciso integrar u con respecto a este volumen.

EJECUTAR: a) De acuerdo con el ejemplo 24.3, la capacitancia del capacitor esférico es

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_ar_b}{r_b - r_a}$$

donde r_a y r_b son los radios de las esferas conductoras interior y exterior. Según la ecuación (24.9) la energía almacenada en este capacitor es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_ar_b}$$

b) La magnitud del campo eléctrico en el volumen comprendido entre las dos esferas conductoras es $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. El campo eléctrico es cero adentro de la esfera interior y también afuera de la superficie interna de la esfera exterior, porque una superficie gaussiana de radio $r < r_a$ o $r > r_b$ encierra una carga neta de cero.

Por esto, la densidad de energía es diferente de cero sólo en el espacio comprendido entre las esferas ($r_a < r < r_b$). En esta región,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

La densidad de energía *no* es uniforme; disminuye rápidamente al aumentar la distancia al centro del capacitor. Para encontrar la energía total del campo eléctrico se integra u (la energía por unidad de volumen) con respecto al volumen comprendido entre las esferas conductoras interior y exterior. Dividiendo este volumen en corazas esféricas de radio r, área total $4\pi r^2$, espesor dr y volumen $dV = 4\pi r^2\,dr$ se obtiene

$$\begin{aligned} U &= \int u\,dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\,dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_a}\right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \end{aligned}$$

EVALUAR: Se obtiene el mismo resultado de U con cualquiera de los planteamientos, como debe ser. Hacemos hincapié en que la energía potencial eléctrica se puede considerar asociada ya sea con las *cargas*, como en el inciso (a), o con el *campo*, como en el inciso (b); cualquiera que sea el punto de vista que se elija, la cantidad de energía almacenada es la misma.

Evalúe su comprensión

Si se conectan en serie un capacitor de 4 μF y uno de 8 μF, ¿cuál de los dos tiene la mayor cantidad de energía almacenada? ¿Y si los capacitores se conectan en paralelo?

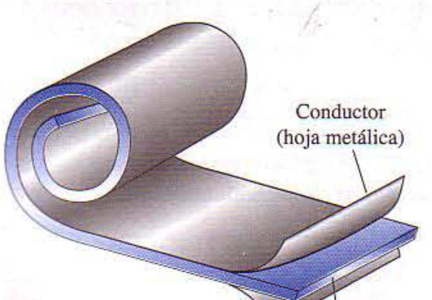
24.4 | Dieléctricos

Casi todos los capacitores tienen un material no conductor, o **dieléctrico**, entre sus placas conductoras. Una clase común de capacitor emplea largas tiras de hoja metálica como placas, separadas por tiras de hoja de material plástico como el Mylar. Un emparedado de estos materiales se enrolla para formar una unidad capaz de proporcionar una capacitancia de varios microfarads en un paquete compacto (Fig. 24.11).

La presencia de un dieléctrico sólido entre las placas de un capacitor tiene tres funciones. Primero, resuelve el problema mecánico de mantener dos láminas metálicas grandes separadas por una distancia muy pequeña sin contacto efectivo.

Segundo, el uso de un dieléctrico aumenta la máxima diferencia de potencial posible entre las placas del capacitor. Como se describió en el ejemplo 23.8 (sección 23.3), cualquier material aislante, cuando se somete a un campo eléctrico suficientemente grande, experimenta **ruptura del dieléctrico**, una ionización parcial que permite la conducción a través de él. Muchos materiales dieléctricos toleran campos eléctricos más intensos sin ruptura que el aire. Por esto, el uso de un dieléctrico permite a un capacitor mantener una diferencia de potencial V más grande y así almacenar mayores cantidades de carga y energía.

Tercero, la capacitancia de un capacitor de dimensiones específicas es *mayor* cuando hay un material dieléctrico entre las placas que cuando hay un vacío. Este efecto se demuestra con ayuda de un *electrómetro* sensible, un dispositivo que mide la diferencia de potencial entre dos conductores sin permitir un flujo de carga apreciable de uno al otro. La figura 24.12a muestra un electrómetro conectado entre los bornes de un capacitor cargado, con una magnitud de carga Q en cada placa y una diferencia de potencial V_0. Cuando se inserta entre las placas una lámina sin carga de un dieléctrico como vidrio, parafina o poliestireno, los experimentos muestran que la diferencia de potencial *disminuye* a un valor más pequeño V (Fig. 24.12b). Cuando se retira el dieléctrico, la diferencia de potencial recupera su va-



24.11 Un tipo común de capacitor emplea una hoja dieléctrica para separar los dos conductores.

lor original V_0, lo que demuestra que las cargas originales de la placas no han cambiado.

La capacitancia original C_0 está dada por $C_0 = Q/V_0$, y la capacitancia C con el dieléctrico presente es $C = Q/V$. La carga Q es la misma en ambos casos, y V es menor que V_0; por tanto, se concluye que la capacitancia C con el dieléctrico presente es *mayor* que C_0. Cuando el espacio entre las placas está ocupado totalmente por el dieléctrico, la proporción de C a C_0 (igual a la proporción de V_0 a V) recibe el nombre de **constante dieléctrica** del material, K:

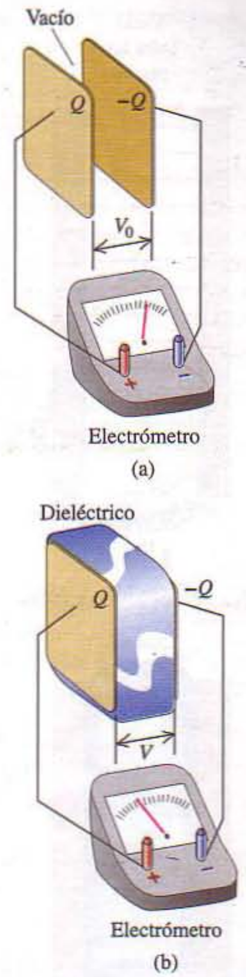
$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{(definición de constante dieléctrica)} \tag{24.12}$$

Cuando la carga es constante, $Q = C_0V_0 = CV$ y $C/C_0 = V_0/V$. En este caso, la ecuación (24.12) se puede escribir de esta otra forma:

$$V = \frac{V_0}{K} \qquad \text{(cuando } Q \text{ es constante)} \tag{24.13}$$

Con el dieléctrico presente, la diferencia de potencial correspondiente a una carga Q en particular se *reduce* por un factor de K.

La constante dieléctrica K es un número puro. Puesto que C siempre es mayor que C_0, K siempre es mayor que la unidad. En la tabla 24.1 se muestran algunos valores representativos de K. En el caso del vacío, $K = 1$ por definición. Por lo que toca al aire a temperaturas y presiones ordinarias, K es aproximadamente 1.0006, un valor tan cercano a 1 que para casi todo fin práctico un capacitor de aire es equivalente a uno en un vacío. Dese cuenta que, si bien el agua tiene un valor muy grande de K, por lo regular no es un dieléctrico muy práctico para emplearse en capacitores. La razón es que, no obstante que el agua pura es un conductor muy malo, también es un excelente disolvente iónico. Cualquier ion disuelto en el agua hará que fluya carga entre las placas del capacitor, con la consecuente descarga de éste.



24.12 Efecto de un dieléctrico entre las placas de un capacitor de placas paralelas. El electrómetro mide la diferencia de potencial. (a) Con una carga determinada, la diferencia de potencial es V_0. (b) Con la misma carga pero con un dieléctrico entre las placas, la diferencia de potencial V es menor que V_0.

Tabla 24.1 Valores de constante dieléctrica K a 20°C

Material	K	Material	K
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (1 atm)	1.00059	Plexiglás	3.40
Aire (100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
Mylar	3.1	Titanato de estroncio	310

Ningún dieléctrico real es un aislador perfecto. En consecuencia, siempre hay cierta *corriente de fuga* entre las placas con carga de un capacitor con dieléctrico. En la sección 24.2 pasamos por alto tácitamente este efecto al deducir expresiones de las capacitancias equivalentes de capacitores en serie [ecuación (24.5)] y en paralelo [ecuación (24.7)]. Pero si una corriente de fuga fluye por el tiempo suficiente para alterar en grado importante las cargas con respecto a los valores en los que se basó la deducción de las ecuaciones (24.5) y (24.7), estas ecuaciones podrían dejar de ser exactas.

24.13 (a) Líneas de campo eléctrico con un vacío entre las placas. (b) Las cargas inducidas en las caras del dieléctrico reducen el campo eléctrico.

Carga inducida y polarización

Cuando se inserta un material dieléctrico entre las placas y se mantiene constante la carga, la diferencia de potencial entre las placas disminuye por un factor de K. Por consiguiente, el campo eléctrico entre las placas debe disminuir por el mismo factor. Si E_0 es el valor en un vacío y E el valor con el dieléctrico, en tal caso

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad (\text{cuando } Q \text{ es constante}) \tag{24.14}$$

Dado que la magnitud del campo eléctrico es menor cuando el dieléctrico está presente, la densidad de carga superficial (que crea el campo) también debe ser más pequeña. La carga superficial de las placas conductoras no cambia, pero aparece una carga *inducida* de signo opuesto en cada superficie del dieléctrico (Fig. 24.13). El dieléctrico era originalmente neutro, y lo sigue siendo; las cargas superficiales inducidas aparecen como resultado de una *redistribución* de la carga positiva y negativa en el interior del material dieléctrico, fenómeno que se conoce como **polarización**. Encontramos por primera vez la polarización en la sección 21.2, y sugerimos ahora leer de nuevo los comentarios referentes a la figura 21.7. Supondremos que la carga superficial inducida es *directamente proporcional* a la magnitud del campo eléctrico E en el material; éste es en efecto el caso en muchos dieléctricos comunes. (Esta proporcionalidad directa es análoga a la ley de Hooke referente a los resortes). En ese caso, K es una constante con respecto a cualquier material específico. Cuando el campo eléctrico es muy intenso, o si el dieléctrico se compone de ciertos materiales cristalinos, la relación entre la carga inducida y el campo eléctrico puede ser más compleja; no consideraremos aquí este tipo de casos.

Se puede deducir una relación entre esta carga superficial inducida y las cargas de las placas. Denotemos como σ_i la magnitud de la carga por unidad de área inducida en las superficies del dieléctrico (la densidad de carga superficial inducida). La magnitud de la densidad de carga superficial en las placas del capacitor es σ, como de costumbre. En tal caso la magnitud de la carga superficial *neta* en cada lado del capacitor es $(\sigma - \sigma_i)$, como se muestra en la figura 24.13b. Como vimos en los ejemplos 21.13 (sección 21.5) y 22.8 (sección 22.4), el campo entre las placas está relacionado con la densidad de carga superficial según $E = \sigma_{neta}/\epsilon_0$. Sin y con el dieléctrico, respectivamente, se tiene

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (24.14) y reorganizando el resultado, se encuentra que

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \qquad (\text{densidad de carga superficial inducida}) \tag{24.16}$$

Esta ecuación muestra que, cuando K es muy grande, σ_i es casi tan grande como σ. En este caso, σ_i cancela casi totalmente a σ, y el campo y la diferencia de potencial son mucho más pequeños que sus valores en un vacío.

El producto $K\epsilon_0$ se conoce como la **permitividad** o capacitancia inductiva específica del dieléctrico, la cual se denota como ϵ:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \qquad (\text{definición de permitividad}) \tag{24.17}$$

En términos de ϵ, el campo eléctrico dentro del dieléctrico se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{24.18}$$

La capacitancia cuando el dieléctrico está presente está dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \tag{24.19}$$

(capacitor de placas paralelas, dieléctrico entre las placas)

Podemos repetir la deducción de la ecuación (24.11) con respecto a la densidad de energía u en un campo eléctrico en el caso en el que está presente un dieléctrico. El resultado es

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad \text{(densidad de energía eléctrica en un dieléctrico)} \tag{24.20}$$

En el espacio vacío, donde $K = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$ y las ecuaciones (24.19) y (24.20) se reducen a las ecuaciones (24.2) y (24.11), respectivamente, que corresponden a un capacitor de placas paralelas en un vacío. Es por esta razón que a veces a ϵ_0 se le llama la "permitividad del espacio libre" o "permitividad del vacío". Dado que K es un número puro, ϵ y ϵ_0 tienen las mismas unidades: $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

Varios dispositivos prácticos aprovechan la manera en que un capacitor responde ante un cambio en la constante dieléctrica. Un ejemplo es el localizador eléctrico de pernos que utilizan las personas que hacen reparaciones en el hogar para localizar pernos ocultos detrá de la superficie de un muro. Se compone de una placa metálica con circuitos asociados. La placa actúa como la mitad de un capacitor, y el muro, como la otra mitad. Si el localizador de pernos pasa encima de un objeto de metal, la constante dieléctrica efectiva del capacitor cambia, la capacitancia se altera y esto activa una señal.

Estrategia para resolver problemas

Dieléctricos

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Las relaciones de esta sección son útiles siempre que se tiene un campo eléctrico en un dieléctrico como, por ejemplo, un dieléctrico entre placas de capacitor con carga. Típicamente se le pedirá relacionar la diferencia de potencial entre las placas, el campo eléctrico en el capacitor, la densidad de carga de las placas del capacitor y la densidad de carga inducida en las superficies del capacitor.

PLANTEAR *el problema utilizando las etapas siguientes:*

1. Haga un dibujo de la situación.
2. Identifique las variables que se buscan, y elija cuál de las ecuaciones fundamentales de esta sección le servirá para hallar esas variables.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. En problemas como el ejemplo 24.10 de la página siguiente, es fácil extraviarse en una andanada de fórmulas. Pregúntese en cada etapa qué clase de cantidad representa cada símbolo. Por ejemplo, distinga con claridad entre cargas y densidades de carga, y entre campos eléctricos y diferencias de potencial eléctrico.
2. Al efectuar cálculos, verifique continuamente la consistencia de las unidades. Este esfuerzo resulta un poco más complejo cuando se trata de cantidades eléctricas que en el caso de la mecánica. Las distancias siempre deben estar en metros. Recuerde que un microfarad es 10^{-6} farads, etcétera. No confunda el valor numérico de ϵ_0 con el valor de $1/4\pi\epsilon_0$. Existen varios conjuntos diferentes de unidades de magnitud de campo eléctrico, como N/C y V/m. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N{\cdot}m^2$ o F/m.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando compruebe valores numéricos, recuerde que, si está presente un dieléctrico, (a) la capacitancia siempre es mayor que en ausencia del dieléctrico; (b) con una cantidad determinada de carga en el capacitor, el campo eléctrico y la diferencia de potencial son menores que en ausencia del dieléctrico, y (c) la magnitud de la densidad de carga superficial inducida σ_i en el dieléctrico siempre es menor que la densidad de carga σ en las placas del capacitor.

Ejemplo 24.10 Capacitor con y sin dieléctrico

Suponga que las placas paralelas de la figura 24.13 cada una tienen un área de 2000 cm^3 (2.00×10^{-1} m^2) y están separadas 1.00 cm (1.00×10^{-2} m). El capacitor se conecta a una fuente de energía y se carga a una diferencia de potencial $V_0 = 3000$ V = 3.00 kV. A continuación se desconecta de la fuente de energía y se inserta una hoja de material plástico aislante entre las placas, el cual ocupa totalmente el espacio entre ellas. Se encuentra que la diferencia de potencial disminuye a 1000 V, en tanto que la carga de cada placa del capacitor permanece constante. Calcule a) la capacitancia original C_0; b) la magnitud de la carga Q de cada placa; c) la capacitancia C después de insertar el dieléctrico; d) la constante dieléctrica K del dieléctrico; e) la permitividad ϵ del dieléctrico; f) la magnitud de la carga inducida Q_i en cada cara del dieléctrico; g) el campo eléctrico original E_0 entre las placas, y h) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Casi todas las variables que se buscan se pueden obtener de varias maneras. Los métodos que se utilizan a continuación son una muestra representativa; lo invitamos a pensar en otras y a comparar sus resultados.

EJECUTAR: a) Con vacío entre las placas, se aplica la ecuación (24.19) con $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}) \frac{2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 1.77 \times 10^{-10}\ \text{F} = 177\ \text{pF}$$

b) Utilizando en la ecuación de capacitancia [ecuación (24.1)],

$$Q = C_0 V_0 = (1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3.00 \times 10^3\ \text{V})$$
$$= 5.31 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0.531\ \mu\text{C}$$

c) Cuando se inserta el dieléctrico, la carga no cambia pero el potencial disminuye a $V = 1000$ V. Por esto, de acuerdo con la ecuación (24.1) la nueva capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{1.00 \times 10^3\ \text{V}} = 5.31 \times 10^{-10}\ \text{F} = 531\ \text{pF}$$

d) Según la ecuación (24.12), la constante dieléctrica es

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31 \times 10^{-10}\ \text{F}}{1.77 \times 10^{-10}\ \text{F}} = \frac{531\ \text{pF}}{177\ \text{pF}} = 3.00$$

O bien, de acuerdo con la ecuación (24.13),

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \text{V}}{1000\ \text{V}} = 3.00$$

e) Sustituyendo K del inciso (d) en la ecuación (24.17), la permitividad es

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3.00)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)$$
$$= 2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

f) Multiplicando la ecuación (24.15) por el área de cada placa se obtiene la carga inducida $Q_i = \sigma_i A$ en términos de la carga $Q = \sigma A$ de cada placa:

$$Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5.31 \times 10^{-7}\ \text{C})\left(1 - \frac{1}{3.00}\right)$$
$$= 3.54 \times 10^{-7}\ \text{C}$$

g) Dado que el campo eléctrico entre las placas es uniforme, su magnitud es simplemente el cociente de la diferencia de potencial entre la separación de las placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 3.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

h) Con la nueva diferencia de potencial después de insertar el dieléctrico:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o bien, de acuerdo con la ecuación (24.17),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o la ecuación (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A}$$
$$= \frac{(5.31 - 3.54) \times 10^{-7}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o la ecuación (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3.00 \times 10^5\ \text{V/m}}{3.00} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

EVALUAR: Siempre resulta útil comprobar los resultados hallándolos por más de una manera, como se hizo en los incisos (d) y (h). Nuestros resultados muestran que la inserción del dieléctrico aumentó la capacitancia por un factor de $K = 3.00$ y redujo el campo eléctrico entre las placas por un factor de $1/K = 1/3.00$. Esto lo hizo creando cargas inducidas en las caras del dieléctrico de magnitud $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3.00) = 0.667Q$.

Ejemplo 24.11 Almacenamiento de energía con y sin dieléctrico

Proporciona la energía total almacenada en el campo eléctrico del capacitor del ejemplo 24.10, así como la densidad de energía, tanto antes como después de la inserción del dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Se aplica la ecuación (24.9) para encontrar la energía almacenada antes y después de insertar el dieléctrico, y la ecuación (24.10) para hallar la densidad de energía.

EJECUTAR: Sea U_0 la energía original y U la energía con el dieléctrico insertado. De acuerdo con la ecuación (24.9),

$$U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2 = \frac{1}{2}(1.77 \times 10^{-10}\text{ F})(3000\text{ V})^2 = 7.97 \times 10^{-4}\text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(5.31 \times 10^{-10}\text{ F})(1000\text{ V})^2 = 2.66 \times 10^{-4}\text{ J}$$

La energía final es un tercio de la energía original.

La densidad de energía sin el dieléctrico está dada por la ecuación (24.20) con $K = 1$:

$$u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0E_0^2 = \frac{1}{2}(8.85 \times 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.0 \times 10^5\text{ N/C})^2$$
$$= 0.398\text{ J/m}^3$$

Con el dieléctrico insertado,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}(2.66 \times 10^{-11}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1.00 \times 10^5\text{ N/C})^2$$
$$= 0.133\text{ J/m}^3$$

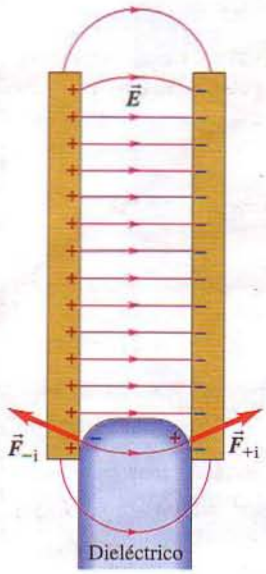
La densidad de energía con el dieléctrico es un tercio de la densidad de energía original.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestra respuesta de u_0 advirtiendo que el volumen entre las placas es $V = (0.200\text{ m})^2(0.0100\text{ m}) = 0.00200\text{ m}^3$. Puesto que el campo eléctrico es uniforme entre las placas, u_0 también es uniforme y la densidad de energía es simplemente el cociente de la energía almacenada entre el volumen:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7.97 \times 10^{-4}\text{ J}}{0.00200\text{ m}^3} = 0.398\text{ J/m}^3$$

lo cual concuerda con nuestra respuesta anterior. Conviene emplear el mismo planteamiento para comprobar el valor de u, la densidad de energía con el dieléctrico.

Podemos generalizar los resultados de este ejemplo. Cuando se inserta un dieléctrico en un capacitor sin que cambie la carga de cada placa, la permitividad ϵ aumenta por un factor de K (la constante dieléctrica), el campo eléctrico disminuye por un factor de $1/K$ y la densidad de energía $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ disminuye por un factor de $1/K$. ¿A dónde se fue la energía? La respuesta se encuentra en el pestañeado del campo en los bordes de un capacitor real de placas paralelas. Como lo muestra la figura 24.14, ese campo tiende a atraer el dieléctrico hacia el espacio entre las placas, realizando trabajo. Se podría acoplar un resorte a la parte inferior del dieléctrico de la figura 24.14 y utilizar esta fuerza para alargar el resorte. Debido a que el campo realiza trabajo, la densidad de energía del campo disminuye.

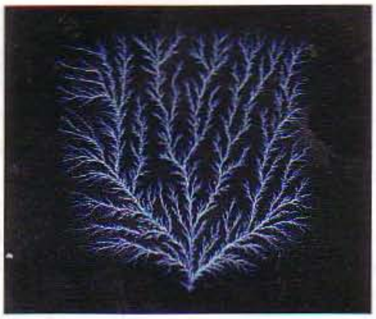


24.14 El pestañeo del campo en las orillas del capacitor ejerce fuerzas $\vec{F}_{-i}$ y $\vec{F}_{+i}$ sobre las cargas superficiales negativas y positivas inducidas de un dieléctrico y atrae el dieléctrico hacia el interior del capacitor.

Ruptura del dieléctrico

Ya hemos mencionado que cuando se somete un material dieléctrico a un campo eléctrico suficientemente intenso, se produce una *ruptura del dieléctrico* y el dieléctrico se convierte en conductor (Fig. 24.15). Esto sucede cuando el campo eléctrico es tan intenso que arranca electrones de sus moléculas y los lanza sobre otras moléculas, con lo cual se liberan aún más electrones. Esta avalancha de carga en movimiento, que forma una chispa o descarga de arco, suele iniciarse repentinamente.

Debido a la ruptura del dieléctrico, los capacitores siempre tienen voltajes máximos nominales. Cuando se somete un capacitor a un voltaje excesivo, se puede



24.15 Un campo eléctrico muy intenso provocó la ruptura del dieléctrico en un bloque de Plexiglás. El flujo de carga resultante grabó este dibujo en el bloque.

formar a través de una capa de dieléctrico un arco que produce un orificio por combustión o fusión. Este arco crea un camino conductor (un cortocircuito) entre los conductores. Si queda una trayectoria conductora después que el arco se ha extinguido, el dispositivo queda inutilizado permanentemente como capacitor.

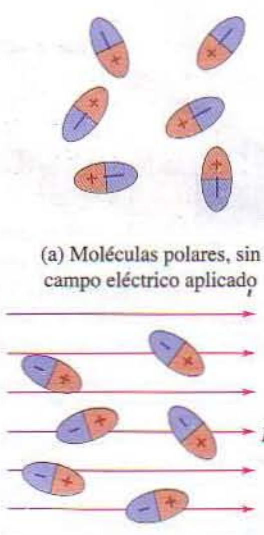
La magnitud máxima de campo eléctrico que un material puede soportar sin que ocurra una ruptura se conoce como su **resistencia dieléctrica**. En esta magnitud influyen de manera importante la temperatura, las impurezas en pequeñas cantidades, las pequeñas irregularidades de los electrodos metálicos y otros factores que es difícil controlar. Por esta razón sólo se pueden citar cifras aproximadas de resistencias dieléctricas. La resistencia dieléctrica del aire seco es aproximadamente 3×10^6 V/m. En la tabla 24.2 se muestran algunos valores representativos de resistencia dieléctrica de materiales aislantes comunes. Dése cuenta que los valores son todos considerablemente mayores que el valor correspondiente al aire. Por ejemplo, una capa de policarbonato de 0.01 mm de espesor (aproximadamente el espesor práctico más reducido) tiene diez veces la resistencia dieléctrica del aire y soporta un voltaje máximo aproximado de $(3 \times 10^7\ \text{V/m})(1 \times 10^{-5}\ \text{m}) = 300\ \text{V}$.

Tabla 24.2 Constante dieléctrica y resistencia dieléctrica de algunos materiales aislantes

Material	Constante dieléctrica, K	Resistencia dieléctrica, $E_{máx}$ (V/m)
Policarbonato	2.8	3×10^7
Poliéster	3.3	6×10^7
Polipropileno	2.2	7×10^7
Poliestireno	2.6	2×10^7
Vidrio Pyrex	4.7	1×10^7

Evalúe su comprensión

El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por una placa de dieléctrico con una constante dieléctrica K. A continuación se extrae la placa de dieléctrico. Las dos placas del capacitor tienen cargas Q y $-Q$, las cuales no cambian al remover la placa. ¿La energía almacenada en el capacitor es mayor, menor o la misma después de quitar el dieléctrico? Si es mayor, ¿cuál es la fuente del energía extra? Si es menor, ¿dónde está la energía perdida?



(a) Moléculas polares, sin campo eléctrico aplicado

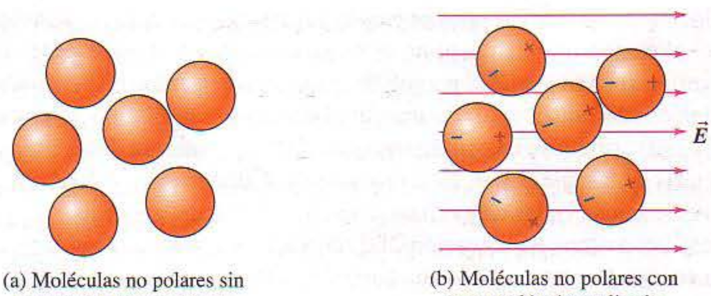
(b) Moléculas polares, con campo eléctrico aplicado

24.16 (a) Las moléculas polares se orientan al azar cuando no hay un campo eléctrico aplicado. (b) Las moléculas tienden a alinearse con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

*24.5 | Modelo molecular de la carga inducida

En la sección 24.4 estudiamos las cargas superficiales inducidas en un dieléctrico que se encuentra en un campo eléctrico. Ahora veremos cómo surgen estas cargas superficiales. Si el material fuera un *conductor*, la respuesta sería simple. Los conductores contienen carga que se traslada libremente y, cuando está presente un campo eléctrico, parte de la carga se redistribuye en la superficie a fin de que no haya un campo eléctrico en el interior del conductor. Pero un dieléctrico ideal *no* tiene cargas con libertad de movimiento, de modo que, ¿cómo puede surgir una carga superficial?

Para comprender esto es necesario examinar de nuevo la reorganización de la carga en el nivel *molecular*. Ciertas moléculas, como H_2O y N_2O, tienen cantidades iguales de carga positiva y negativa pero una distribución desigual, con un exceso de carga positiva concentrado en un lado de la molécula y carga negativa en el otro. Como se describió en la sección 21.7, una configuración de este tipo recibe el nombre de *dipolo eléctrico* y la molécula se describe como una *molécula polar*. Cuando no está presente un campo eléctrico en un gas o líquido con moléculas polares, las mo-



(a) Moléculas no polares sin campo eléctrico aplicado

(b) Moléculas no polares con campo eléctrico aplicado

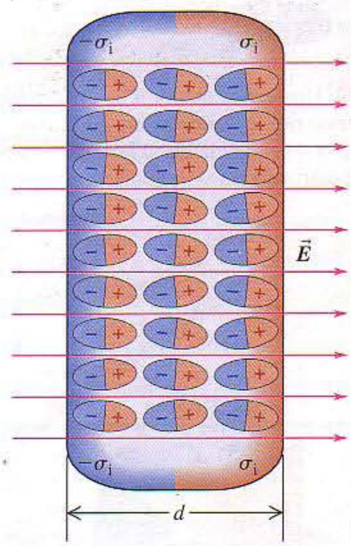
24.17 (a) Los centros de carga positiva y negativa de las moléculas no polares están en el mismo punto. (b) Estos centros se separan ligeramente por la acción de un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

léculas están orientadas al azar (Fig. 24.16a). Sin embargo, cuando se colocan en un campo eléctrico tienden a orientarse como en la figura 24.16b, como resultado de los momentos de torsión de campo eléctrico descritos en la sección 21.7. Debido a la agitación térmica, la alineación de las moléculas con $\vec{E}$ no es perfecta.

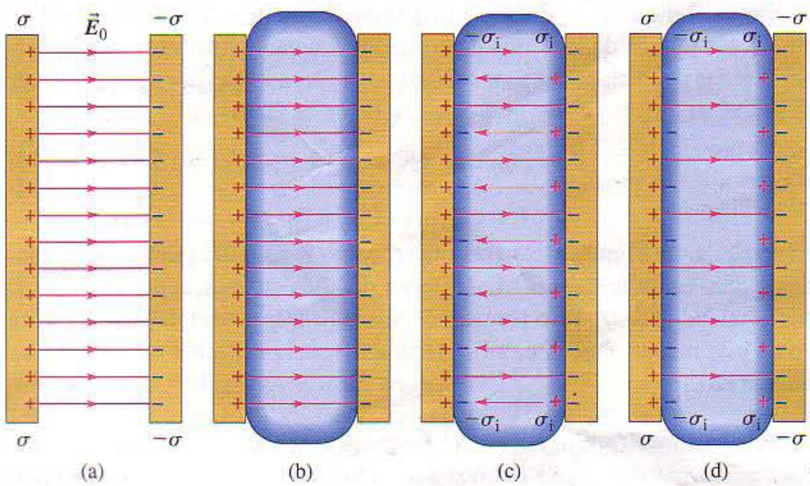
Incluso una molécula que ordinariamente *no* es polar se vuelve un dipolo cuando es colocada en un campo eléctrico porque el campo empuja las cargas positivas de las moléculas en la dirección del campo y empuja las cargas negativas en dirección opuesta. Esto provoca una resdistribución de carga dentro de la molécula (Fig. 24.17). Estos dipolos se conocen como dipolos *inducidos*.

Con moléculas ya sea polares o no polares, la redistribución de la carga provocada por el campo da lugar a la formación de una capa de carga en cada superficie del material dieléctrico (Fig. 24.18). Estas capas son las cargas superficiales descritas en la sección 24.4; su densidad de carga superficial se denota como σ_i. Las cargas *no* tienen libertad de trasladarse indefinidamente, como sería el caso en un conductor, porque cada carga está unida a una molécula. De hecho, se les llama **cargas ligadas** para distinguirlas de las **cargas libres** que se agregan o se quitan a las placas conductoras del capacitor. En el interior del material la carga neta por unidad de volumen sigue siendo cero. Como hemos visto, esta redistribución de carga se llama *polarización*, y se dice que el material está *polarizado*.

Las cuatro partes de la figura 24.19 muestran el comportamiento de una placa de dieléctrico cuando se inserta en el campo entre un par de placas de capacitor con cargas opuestas. La figura 24.19a muestra el campo original. La figura 24.19b es la situación cuando se ha insertado el dieléctrico pero aún no se han reorganizado las cargas. La figura 24.19c muestra mediante flechas más finas el campo adicional es-



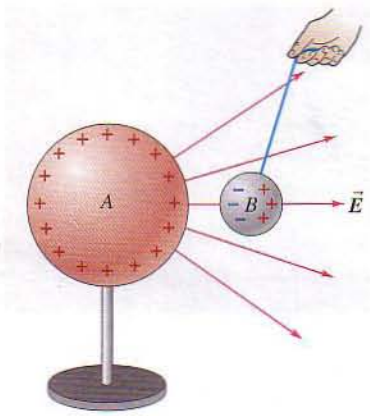
24.18 La polarización de un dieléctrico en un campo eléctrico $\vec{E}$ da origen a capas finas de cargas ligadas en las superficies, y esto crea densidades de carga superficiales σ_i y σ_{-i}. Se ha exagerado considerablemente el tamaño de las moléculas para mayor claridad.



24.19 (a) Campo eléctrico de magnitud E_0 entre dos placas con carga. (b) Introducción de un dieléctrico de constante dieléctrica K. (c) Cargas superficiales inducidas y su campo (líneas más finas). (d) Campo resultante de magnitud E_0/K cuando hay un dieléctrico entre placas con carga.

tablecido en el dieléctrico por sus cargas superficiales inducidas. Este campo es *opuesto* al campo original, pero no es lo suficientemente grande para cancelar el campo original en su totalidad porque las cargas del dieléctrico no tienen libertad de trasladarse indefinidamente. La magnitud del campo resultante en el dieléctrico (Fig. 24.19d) disminuye en consecuencia. En la representación de las líneas de campo, algunas de las que parten de la placa positiva atraviesan el dieléctrico, en tanto que otras terminan en las cargas inducidas en las caras del dieléctrico.

Como explicamos en la sección 21.2, la polarización es también la razón por la que un cuerpo con carga, como una barra de plástico electrificada, ejerce una fuerza sobre un cuerpo *sin carga* como un pedacito de papel o una bolita de médula. La figura 24.20 muestra una esfera dieléctrica sin carga B en el campo radial de un cuerpo con carga positiva A. Las cargas positivas inducidas en B experimentan una fuerza hacia la derecha, en tanto que la fuerza sobre las cargas inducidas negativas es hacia la izquierda. Las cargas negativas están más próximas a A y, de este modo, se encuentran en un campo más intenso que las cargas positivas. La fuerza hacia la izquierda es más intensa que la fuerza hacia la derecha, y B es atraída hacia A, no obstante que su carga neta es cero. La atracción ocurre ya sea que el signo de la carga de A sea positivo o negativo (véase la Fig. 21.7). Además, el efecto no se limita a los dieléctricos; un cuerpo conductor sin carga sería atraído de la misma manera.



24.20 Una esfera neutra B en el campo eléctrico radial de una esfera con carga positiva A es atraída hacia la carga debido a la polarización.

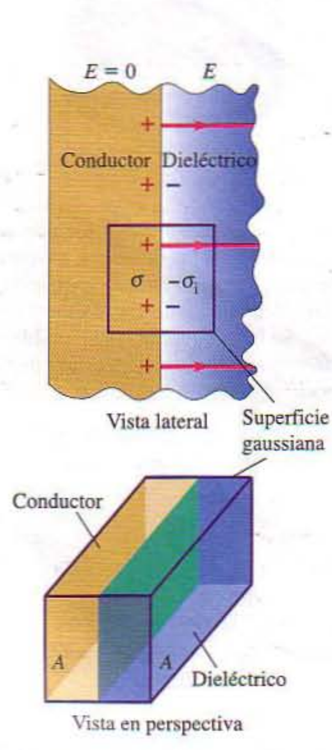
Evalúe su comprensión

¿Por qué tiene el agua una constante dieléctrica tan grande como la que se cita en la tabla 24.1? (*Sugerencia:* Véase la Fig. 21.28).

*24.6 | La ley de Gauss en los dieléctricos

El análisis de la sección 24.4 se puede ampliar a fin de reformular la ley de Gauss en una forma que resulta particularmente útil en el caso de los dieléctricos. La figura 24.21 es un acercamiento de la placa izquierda del capacitor y de la superficie izquierda del dieléctrico de la figura 24.13b. Apliquemos la ley de Gauss a la caja rectangular que se muestra en corte transversal mediante la línea morada; el área total de los lados izquierdo y derecho es A. El lado izquierdo está incrustado en el conductor que constituye la placa izquierda del capacitor; por tanto, el campo eléctrico en todas las partes de esa superficie es cero. El lado derecho está incrustado en el dieléctrico, donde la magnitud del campo eléctrico es E, y $E_{\perp} = 0$ en todos los puntos de los otros cuatro lados. La carga total encerrada, incluida tanto la carga de la placa del capacitor como la carga inducida en la superficie del dieléctrico, es $Q_{enc} = (\sigma - \sigma_i)A$; por tanto, la ley de Gauss da

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \qquad (24.21)$$



24.21 Ley de Gauss con un dieléctrico. Esta figura muestra un primer plano de la placa izquierda del capacitor de la figura 24.13b. La superficie gaussiana es una caja rectangular, una mitad de la cual está en el conductor, y la otra mitad, en el dieléctrico.

Esta ecuación no es muy esclarecedora tal como se muestra porque relaciona dos magnitudes desconocidas: E en el interior del dieléctrico y la densidad de carga superficial inducida σ_i. Pero ahora podemos aplicar la ecuación (24.16), formulada para esta misma situación, a fin de simplificar la ecuación eliminando σ_i. La ecuación (24.16) es

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{o} \quad \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$$

Combinando esto con la ecuación (24.21) se obtiene

$$EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \quad \text{o} \quad KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{24.22}$$

La ecuación (24.22) afirma que el flujo de $K\vec{E}$, no $\vec{E}$, a través de la superficie gaussiana de la figura 24.21 es igual al cociente de la carga *libre* encerrada σA entre ϵ_0. Resulta que, con respecto a *cualquier* superficie gaussiana, siempre que la carga inducida es proporcional al campo eléctrico en el material, la ley de Gauss se puede escribir como

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc-libre}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss en un dieléctrico)} \tag{24.23}$$

donde $Q_{\text{enc-libre}}$ es la carga *libre* total (no carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. La trascendencia de estos resultados es que los lados derechos contienen sólo la carga *libre* del conductor, no la carga ligada (inducida). De hecho, aunque no lo hemos probado, la ecuación (24.23) conserva su validez incluso cuando distintas partes de la superficie gaussiana están incrustadas en dieléctricos con valores diferentes de K, siempre y cuando el valor de K en cada dieléctrico sea independiente del campo eléctrico (lo que es habitualmente el caso cuando los campos eléctricos no son demasiado intensos) y se utilice el valor apropiado de K con respecto a cada punto de la superficie gaussiana.

Ejemplo 24.12 Capacitor esférico con dieléctrico

En el capacitor esférico del ejemplo 24.3 (sección 24.1), el volumen entre las corazas conductoras esféricas concéntricas está lleno de un aceite aislante cuya constante dieléctrica es K. Halle la capacitancia con base en la ley de Gauss.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 24.3, se usa una superficie gaussiana esférica de radio r entre las dos esferas. En vista de que hay un dieléctrico presente, emplearemos la ley de Gauss en la forma de la ecuación (24.23).

EJECUTAR: La simetría esférica del problema no cambia por la presencia del dieléctrico; por tanto, se tiene

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint KE\,dA = KE \oint dA = (KE)\,(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}$$

donde $\epsilon = K\epsilon_0$ es la permitividad del dieléctrico (presentada en la sección 24.4). En comparación con el caso en el que hay un vacío entre las corazas conductoras, el campo eléctrico se reduce por un factor de $1/K$. La diferencia de potencial V_{ab} entre las corazas se reduce igualmente por un factor de $1/K$; en estos términos, la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ *aumenta* por un factor de K, tal como ocurre en el caso de un capacitor de placas paralelas cuando se inserta un dieléctrico. Con base en el resultado del caso con vacío del ejemplo 24.3, la capacitancia con el dieléctrico resulta ser

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi \epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

EVALUAR: En este caso el dieléctrico ocupa en su totalidad el volumen entre los dos conductores; por tanto, la capacitancia es simplemente el producto de K por el valor sin dieléctrico. El resultado es más complicado si el dieléctrico llena sólo en parte este volumen (véase el Problema de desafío 24.78).

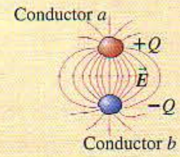
Evalúe su comprensión

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia r desde una sola carga puntual q incrustada en un dieléctrico cuya constante dieléctrica es K?

RESUMEN

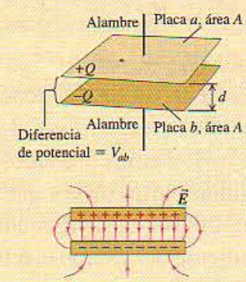
Un capacitor es todo par de conductores separados por un material aislante. Cuando el capacitor está cargado, los dos conductores tienen cargas de igual magnitud Q y signos opuestos, y el potencial V_{ab} del conductor con carga positiva respecto al conductor con carga negativa es proporcional a Q. La capacitancia Q se define como la relación de Q a V_{ab}. La unidad SI de capacitancia es el farad (F): 1 F = 1 C/V.

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad (24.1)$$



Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con un área A, separadas por una distancia d. Si están separadas por un vacío, la capacitancia depende sólo de A y de d. En el caso de otras geometrías, la capacitancia se puede proporcionar utilizando la definición $C = Q/V_{ab}$. (Véanse los ejemplos del 24.1 al 24.4).

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (24.2)$$



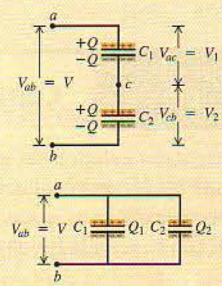
Cuando se conectan en serie capacitores con capacitancias $C_1, C_2, C_3,...$, el recíproco de la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Cuando se conectan capacitores en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de las capacitancias individuales. (Véanse los ejemplos 24.5 y 24.6).

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad (24.5)$$

(capacitores en serie)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad (24.5)$$

(capacitores en paralelo)



La energía U que se requiere para cargar un capacitor C a una diferencia de potencial V y con una carga Q es igual a la energía almacenada en el capacitor. Se puede pensar que esta energía reside en el campo eléctrico entre los conductores; la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico. (Véanse los ejemplos del 24.7 al 24.9).

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (24.9)$$

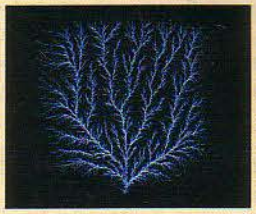
$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad (24.11)$$

Cuando el espacio entre los conductores está ocupado por un material dieléctrico, la capacitancia aumenta por un factor de K, llamado constante dieléctrica del material. La magnitud $\epsilon = K\epsilon_0$ se conoce como la permitividad del dieléctrico. Cuando se tiene una cantidad fija de carga en las placas del capacitor, las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico disminuyen el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las placas por un mismo factor: K. La carga superficial es consecuencia de la polarización, un reordenamiento microscópico en la carga del dieléctrico. (Véase el ejemplo 24.10).

$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \qquad (24.19)$$

(capacitor de placas paralelas rellenado con dieléctrico)

Bajo la influencia de campos eléctricos suficientemente intensos, los dieléctricos se hacen conductores, situación que se conoce como ruptura del dieléctrico. El campo máximo que un material puede soportar sin sufrir ruptura se conoce como su resistencia dieléctrica.



En un dieléctrico, la expresión de la densidad de energía es la misma que en un vacío pero con $\epsilon = K\epsilon_0$ en vez de ϵ. (Véase el ejemplo 24.11).

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad (24.20)$$

La ley de Gauss en un dieléctrico tiene casi la misma forma que en un vacío, con dos diferencias clave: $K\vec{E}$ toma el lugar de $\vec{E}$ y Q_{enc} se sustituye por $Q_{\text{enc-libre}}$, que incluye sólo la carga libre (no la carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. (Véase el ejemplo 24.12).

$$\oint K\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc-libre}}}{\epsilon_0} \qquad (24.23)$$

Términos clave

capacitancia, 909
capacitancia equivalente, 914
capacitor, 909
capacitor de placas paralelas, 910
carga libre, 929
carga ligada, 929
conexión en paralelo, 915
conexión en serie, 914
constante dieléctrica, 923
densidad de energía, 919
dieléctrico, 922
farad, 909
permitividad, 924
polarización, 924
resistencia dieléctrica, 928
ruptura del dieléctrico, 922

Notas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Reducir la distancia d entre las placas del capacitor provoca que la capacitancia C aumente, de acuerdo con la ecuación (24.2). Si Q no cambia, la diferencia de potencial $V = Q/C$ disminuye.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 24.1 La capacitancia no depende del valor de la carga Q. Duplicar el valor de Q hace que la diferencia de potencial V_{ab} se duplique; de este modo, la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ no cambia. Estas aseveraciones son válidas cualquiera que sea la geometría del capacitor.

Sección 24.2 La diferencia de potencial V_{ab} es la *misma* entre los bornes de cualquiera de los capacitores de una configuración en paralelo. La carga de un capacitor está dada por $Q = CV_{ab}$; por tanto, hay más carga en el capacitor de 8 μF (esto es, en el de mayor capacitancia).

Sección 24.3 Los capacitores conectados en serie tienen la misma carga Q. La cantidad de energía almacenada se compara por medio de la expresión $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9), la cual muestra que el capacitor con *menor* capacitancia ($C = 4$ μF) tiene más energía almacenada en una combinación en serie. En cambio, los capacitores en paralelo tienen la misma diferencia de potencial V, de modo que para compararlos conviene usar la expresión $U = \frac{1}{2}CV^2$ de la ecuación (24.9), la cual muestra que, en una combinación en paralelo, el capacitor de *mayor* capacitancia ($C = 8$ μF) tiene más energía almacenada. (Si hubiésemos empleado $U = \frac{1}{2}CV^2$ para analizar la combinación en serie, habríamos tenido que tener en cuenta las diferencias de potencial no iguales entre los bornes de los dos capacitores. De la misma manera, el estudio de la combinación en paralelo con base en $U = Q^2/2C$ nos obligaría a tener en cuenta las diferentes cargas de los capacitores).

Sección 24.4 En este caso Q no cambia; así, conviene utilizar $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9) como la energía almacenada. La eliminación del dieléctrico reduce la capacitancia por un factor de $1/K$; puesto que U es inversamente proporcional a C, la energía almacenada *aumenta* por un factor de K. Se necesita trabajo para extraer la placa dieléctrica del capacitor porque el campo bordeante pestañea al introducir de nuevo la placa dieléctrica (Fig. 24.14). El trabajo que se realiza se agrega a la energía almacenada en el capacitor.

Sección 24.5 Las moléculas de agua son sumamente polares (véase la Fig. 21.28). Debido a que el agua es un líquido, las moléculas tienen libertad de trasladarse y se orientan fácilmente con un campo eléctrico aplicado de magnitud E_0. El campo inducido resultante dentro del agua (como las líneas finas de la Fig. 24.19c) es tan intenso que cancela casi totalmente el campo aplicado. De acuerdo con la ecuación (24.14), el campo resultante (la suma de los campos aplicado e inducido) es $E = E_0/K$. Puesto que E es mucho menor que E_0, se sigue que la constante dieléctrica K es grande.

Sección 24.6 La ecuación (24.23) muestra que esta situación es equivalente a la de una carga puntual aislada en un vacío, pero con $K\vec{E}$ en vez de $\vec{E}$. Por tanto, KE en el punto de interés es igual a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, y en estos términos $E = q/4\pi K\epsilon_0 r^2 = q/4\pi\epsilon r^2$. Al igual que en el ejemplo 24.12, rellenar el espacio con un dieléctrico reduce el campo eléctrico por un factor de $1/K$.

Preguntas para análisis

P24.1 La ecuación (24.2) muestra que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas crece a medida que la separación d de las placas disminuye. No obstante, existe un límite práctico en cuanto a lo pequeña que d puede llegar a ser, y esto impone un límite superior a la magnitud de C. Explique qué es lo que fija el límite de d. (*Sugerencia:* ¿Qué le ocurre a la magnitud del campo eléctrico cuando $d \to 0$?)

P24.2 Se introduce una placa sólida de metal entre las placas de un capacitor sin que toque ninguna de las placas. ¿Aumenta, disminuye o no cambia la capacitancia? Explique su razonamiento.

P24.3 Suponga que las dos placas de un capacitor tienen diferente área. Cuando se carga el capacitor conectándolo a una batería, ¿tienen las cargas de las dos placas la misma magnitud, o pueden ser diferentes? Explique su razonamiento.

P24.4 En el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) de Illinois, se aceleran protones alrededor de un anillo de 2 km de radio hasta alcanzar una rapidez próxima a la de la luz. La energía para hacerlo se almacena en capacitores del tamaño de una casa. Cuando estos capacitores se están cargando, emiten un crujido muy intenso. ¿Cuál es el origen de este sonido?

P24.5 En el capacitor de placas paralelas de la figura 24.2, suponga que se separan las placas de modo que la separación d sea mucho mayor que el tamaño de las placas. a) ¿Sigue siendo exacto afirmar que el campo eléctrico entre las placas es uniforme? ¿Por qué? b) En la situación que se muestra en la figura 24.2, la diferencia de potencial entre las placas es $V_{ab} = Qd/\epsilon_0 A$. Si se separan las placas como se ha descrito, ¿es V_{ab} mayor o menor que lo que esta fórmula indicaría? Explique su razonamiento. c) Con las placas separadas como se ha descrito, ¿es la capacitancia mayor que, menor que o igual a la que da la ecuación (24.2)? Explique su razonamiento.

P24.6 Se carga un capacitor de placas paralelas conectándolo a una batería y se mantiene conectado a ella. En seguida se duplica la distancia entre las placas. ¿Cómo cambia el campo eléctrico? ¿Y la carga de las placas? ¿Y la energía total? Explique su razonamiento.

P24.7 Se carga un capacitor de placas paralelas conectándolo a una batería y después se desconecta de ella. En seguida se duplica la distancia entre las placas. ¿Cómo cambia el campo eléctrico? ¿Y la diferencia de potencial? ¿Y la energía total? Explique su razonamiento.

P24.8 De acuerdo con el texto, se puede considerar que la energía de un capacitor cargado se halla en el campo entre las placas. Suponga, sin embargo, que hay un vacío entre las placas, ¿puede haber energía en un vacío? ¿Por qué? ¿Qué forma adoptaría esta energía?

P24.9 Las placas con carga de un capacitor se atraen mutuamente; por tanto, para separar las placas aún más es necesario que alguna fuerza externa realice trabajo. ¿Qué le ocurre a la energía agregada en virtud de este trabajo? Explique su razonamiento.

P24.10 Se proporcionan cargas $\pm Q$ a las dos placas de un capacitor. Después se desconecta el capacitor del dispositivo de carga para que las cargas de las placas no cambien y se sumerge en un tanque de aceite. ¿Aumenta, disminuye o permanece sin cambio el campo eléctrico entre las placas? Explique su razonamiento. ¿Cómo se puede medir este campo?

P24.11 Como se muestra en la tabla 24.1, el agua tiene una constante dieléctrica muy grande: $K = 80.4$. ¿Por qué no se utiliza comúnmente agua como dieléctrico en los capacitores?

P24.12 ¿Es la resistencia dieléctrica lo mismo que la constante dieléctrica? Explique las diferencias entre las dos magnitudes. ¿Existe alguna relación simple entre la resistencia dieléctrica y la constante dieléctrica (véase la tabla 24.2)?

P24.13 Se sometió a un voltaje excesivo un capacitor hecho de tiras de laminilla de aluminio separadas por película de Mylar, y la consecuente ruptura del dieléctrico formó agujeros por fusión en el Mylar. Después de esto, se encontró que la capacitancia era aproximadamente la misma que antes, pero el voltaje de ruptura era mucho menor. ¿Por qué?

P24.14 Dos capacitores tienen la misma capacitancia, pero uno tiene un voltaje máximo nominal más alto que el otro. ¿Cuál de los capacitores es probablemente más voluminoso? ¿Por qué?

P24.15 Se puede medir la frescura del pescado colocando uno entre las placas de un capacitor y midiendo la capacitancia. ¿Cómo funciona esto? (*Sugerencia:* Al pasar el tiempo, el pescado se seca. Véase la tabla 24.1).

P24.16 Los capacitores *electrolíticos* emplean como dieléctrico una capa extremadamente fina de un óxido no conductor entre una placa metálica y una solución conductora. Analice la ventaja de un capacitor de este tipo con respecto a uno construido con un dieléctrico sólido entre placas metálicas.

P24.17 Se conecta un capacitor de placas paralelas a una fuente de energía que mantiene una diferencia de potencial fija entre las placas. Si en seguida se desliza una lámina de dieléctrico entre las placas, ¿qué le ocurre i) al campo eléctrico entre las placas, ii) a la magnitud de la carga de cada placa y iii) a la energía almacenada en el capacitor? Suponga ahora que, antes de insertar el dieléctrico, se desconecta el capacitor cargado de la fuente de energía. En este caso, ¿qué le ocurre i) al campo eléctrico entre las placas, ii) a la magnitud de la carga de cada placa y iii) a la energía almacenada en el capacitor? Explique las diferencias entre las dos situaciones.

P24.18 Los dieléctricos líquidos cuyas moléculas son polares (como el agua) siempre tienen constantes dieléctricas que disminuyen al aumentar la temperatura. ¿Por qué?

P24.19 Un conductor es un caso extremo de dieléctrico, pues si se aplica un campo eléctrico a un conductor, las cargas tienen libertad de trasladarse dentro del conductor para establecer "cargas inducidas". ¿Cuál es la constante dieléctrica de un conductor perfecto? ¿Es $K = 0$? ¿O $K = \infty$? ¿O algo intermedio? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 24.1 Capacitores y capacitancia

24.1 Un capacitor tiene una capacitancia de 7.28 μF. ¿Qué cantidad de carga se debe colocar en cada una de sus placas para que la diferencia de potencial entre ellas sea igual a 25.0 V?

24.2 Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas 3.28 mm y el área de cada una es de 12.2 cm^2. Cada placa tiene una carga cuya magnitud es de 4.35×10^{-8} C. Las placas están en un vacío. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas?

24.3 Un capacitor de placas paralelas de aire cuya capacitancia es de 245 pF tiene en cada placa una carga cuya magnitud es de 0.148 μC. Las placas están separadas 3.28 mm. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) ¿Cuál es el área de cada placa? c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas? d) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en cada placa?

24.4 Un capacitor de placas paralelas relleno de aire tiene placas circulares separadas por una distancia de 1.80 mm. La magnitud de la carga por unidad de área de cada placa es de 5.60 pC/m^2. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor?

24.5 Un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF con placas circulares está conectado a una batería de 12.0 V. a) ¿Cuál es la carga en cada placa? b) ¿Cuánta carga habría en las placas si se duplicara su separación mientras el capacitor permanece conectado a la batería? c) ¿Cuánta carga habría en las placas si se conectara el capacitor a una batería de 12.0 V después de duplicar el radio de cada placa sin alterar su separación?

24.6 Se conecta un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF a una batería de 12.0 V. Una vez que el capacitor está totalmente cargado, se desconecta la batería sin que se pierda nada de la carga de las placas. a) Se conecta un voltímetro entre las dos placas sin descargarlas. ¿Cuál es su lectura? b) ¿Cuál sería la lectura del voltímetro si i) se duplicara la separación de placas; ii) se duplicara el radio de cada placa sin que cambie su separación?

24.7 ¿Cuál debe ser la separación entre dos monedas paralelas de un centavo de dólar para formar un capacitor de 1.00 pF? ¿Sugiere su respuesta que se justifica tratar estas monedas como láminas infinitas? Explique su respuesta.

24.8 Un capacitor de placas paralelas de 5.00 pF, relleno de aire y con placas circulares se va a utilizar en un circuito en el que estará sometido a potenciales de hasta 1.00×10^2 V. El campo eléctrico entre las placas no debe ser mayor que 1.00×10^4 N/C. En su calidad de ingeniero electricista recién egresado para Electrónica de Alta Tensión, sus tareas son a) proyectar el capacitor hallando cuáles deben ser sus dimensiones y su separación; b) encontrar la carga máxima que estas placas pueden soportar.

24.9 Cierto capacitor consiste en dos cilindros coaxiales huecos de hierro, uno adentro del otro. El cilindro interior tiene carga negativa, y el exterior, carga positiva; la magnitud de la carga en cada uno es de 10 pC. El radio del cilindro interior es de 0.50 mm, el del cilindro exterior, de 5.00 mm, y la longitud de cada cilindro es de 18.0 cm. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Qué diferencia de potencial es necesario aplicar para tener estas cargas en los cilindros?

24.10 Un capacitor cilíndrico como el del ejemplo 24.4 (sección 24.1) tiene una capacitancia por unidad de longitud de 31.5 pF/m. a) Encuentre la proporción de los radios de los conductores interior y exterior. b) Si la diferencia de potencial entre los conductores interior y exterior es de 2.60 V, ¿cuál es la magnitud de la carga por unidad de longitud de los conductores?

24.11 Cierto capacitor cilíndrico tiene un conductor interior con un radio de 1.5 mm y un conductor exterior con un radio de 3.5 mm. Los dos conductores están separados por un vacío y el capacitor completo mide 2.8 m de largo. a) ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud? b) El potencial del conductor interior es 350 mV mayor que el del conductor exterior. Halle la carga (magnitud y signo) de ambos conductores.

24.12 Un capacitor esférico consta de dos corazas conductoras esféricas concéntricas separadas por un vacío. La esfera interior tiene un radio de 15.0 cm y la capacitancia es de 116 pF. a) ¿Cuál es el radio de la esfera exterior? b) Si la diferencia de potencial entre las dos esferas es de 220 V, ¿cuál es la magnitud de la carga de cada esfera?

24.13 Un capacitor esférico consta de dos corazas conductoras esféricas concéntricas separadas por un vacío. Los radios de las esferas interior y exterior son de 12.5 cm y 14.8 cm, respectivamente. Se aplica una diferencia de potencial de 120 V al capacitor. a) ¿Cuál es la capacitancia del capacitor? b) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = 12.6$ cm, inmediatamente afuera de la esfera interior? c) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = 14.7$ cm, inmediatamente adentro de la esfera exterior? d) En el caso de un capacitor de placas paralelas $\vec{E}$ es uniforme en la región entre las placas, excepto cerca de los bordes de éstas. ¿Ocurre lo mismo en el caso de un capacitor esférico?

Sección 24.2 Capacitores en serie y en paralelo

24.14 En el circuito de la figura 24.22, $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\ \mu$F y $C_3 = 6.00\ \mu$F. El potencial aplicado es $V_{ab} = +24.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor; c) la diferencia de potencial entre los puntos a y d.

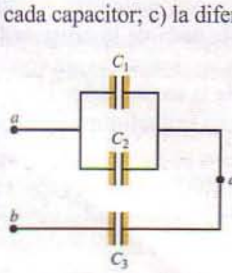


Figura 24.22 Ejercicios 24.14, 24.22 y 24.23.

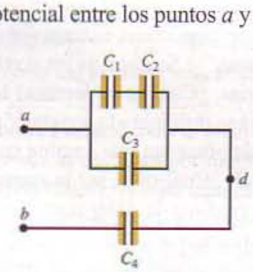


Figura 24.23 Ejercicio 24.15.

24.15 En la figura 24.23, cada capacitor tiene $C = 4.00\ \mu$F y $V_{ab} = +28.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor; c) la diferencia de potencial entre los puntos a y d.

24.16 En la figura 24.6a, sean $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\ \mu$F y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor.

24.17 En la figura 24.7a, sean $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\ \mu$F y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor.

24.18 Dos capacitores al vacío entre las placas paralelas con separaciones entre placas d_1 y d_2 y áreas de placa iguales A. Demuestre que, cuando los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente es la misma que en el caso de un solo capacitor con área de placa A y separación $d_1 + d_2$.

24.19 Dos capacitores al vacío entre las placas paralelas tienen áreas A_1 y A_2 y separaciones de placas iguales d. Demuestre que, cuando los capacitores están conectados en paralelo, la capacitancia equivalente es la misma que la de un solo capacitor con área de placas $A_1 + A_2$ y separación d.

24.20 Con respecto a la situación que se muestra en la figura 24.8a, suponga que $V_{ab} = +36$ V. Calcule a) la carga de cada capacitor; b) la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor. c) La carga de la red en su totalidad es $Q = C_{eq}V_{ab}$, donde $C_{eq} = 6\ \mu$F según el ejemplo 24.5 (sección 24.2). Explique por qué Q es igual a la carga del capacitor de 9 μF. Explique por qué Q también es igual a la suma de la carga del capacitor de 3 μF, del capacitor de 11 μF y de *ya sea* el capacitor de 12 μF o el de 6 μF.

24.21 Suponga que el capacitor de 3 μF de la figura 24.8 se quita y se sustituye por otro diferente, y que con esto la capacitancia equivalente entre los puntos a y b cambia a 8 μF. ¿Cuál sería la capacitancia del capacitor sustituto?

24.22 En la figura 24.22, $C_1 = 6.00\ \mu$F, $C_2 = 3.00\ \mu$F y $C_3 = 5.00\ \mu$F. La red de capacitores está conectada a un potencial aplicado V_{ab}. Cuando las cargas de los capacitores han alcanzado sus valores finales, la carga de C_2 es de 40.0 μC. a) ¿Cuáles son las cargas de los capacitores C_1 y C_3? b) ¿Cuál es el voltaje aplicado V_{ab}?

24.23 En la figura 24.22, $C_1 = 3.00\ \mu$F y $V_{ab} = 120$ V. La carga del capacitor C_1 es de 150 μC. Calcule el voltaje entre los bornes de los otros dos capacitores.

Sección 24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

24.24 Un capacitor de aire entre las placas paralelas tiene una capacitancia de 920 pF. La carga de cada placa es de 2.55 μC. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? b) Si la carga permanece constante, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las placas si se duplica la separación? c) ¿Cuánto trabajo se necesita para duplicar la separación?

24.25 Un capacitor de aire entre las placas paralelas de 5.80 μF tiene una separación de 5.00 mm y está cargado a una diferencia de potencial de 400 V. Calcule la densidad de energía en la región comprendida entre las placas, en unidades de J/m^3.

24.26 Un capacitor de aire construido de dos placas paralelas planas separadas 1.50 mm. La magnitud de la carga de cada placa es de 0.0180 μC cuando la diferencia de potencial es de 200 V. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es el área de cada placa? c) ¿Cuál es el voltaje máximo que se puede aplicar sin que haya ruptura del dieléctrico? (En el caso del aire, la ruptura del dieléctrico ocurre a una intensidad de campo eléctrico de 3.0×10^6 V/m.) d) Cuando la carga es de 0.0180 μC, ¿cuál es la energía total almacenada?

24.27 Se carga un capacitor de 450 μF a 295 V, en seguida se conecta un alambre entre las placas. ¿Cuántos joules de energía térmica se producen al descargarse el capacitor si toda la energía que estaba almacenada se emplea en calentar el alambre?

24.28 Un capacitor de capacitancia C se carga a una diferencia de potencial V_0. A continuación se conectan los bornes del capacitor cargado a los de un capacitor sin carga de capacitancia $C/2$. Calcule a) la carga original del sistema; b) la diferencia de potencial final entre los bornes de cada capacitor; c) la energía final del sistema; d) la disminución de energía al conectar los capacitores. e) ¿Adónde se fue la energía "perdida"?

24.29 Un capacitor al vacío entre las placas paralelas con área de placas A y separación x tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus placas. El capacitor está desconectado de la fuente de carga, por lo que la carga de cada placa permanece fija. a) ¿Cuál es la energía total almacenada en el capacitor? b) Se separan las placas una distancia adicional dx. ¿Cuánto cambia la energía almacenada? c) Si F es la fuerza con la que las placas se atraen una a la otra, entonces el cambio de energía almacenada debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ realizado al separar las placas. Encuentre una expresión para F. d) Explique por qué F *no* es igual a QE, donde E es el campo eléctrico entre las placas.

24.30 Un capacitor al vacío entre las placas paralelas tiene 8.38 J de energía almacenada en él. La separación entre las placas es de 2.30 mm. Si se reduce la separación a 1.15 mm, ¿cuál es la energía almacenada si a) se desconecta el capacitor de la fuente de potencial para que la carga de las placas permanezca constante? b) ¿El capacitor permanece conectado a la fuente de potencial para que la diferencia de potencial entre las placas se mantenga constante?

24.31 ¿Cuántos electrones en exceso se deben agregar a una placa y quitar a la otra para proporcionar a un capacitor de placas paralelas de 5.00 nF 25.0 J de energía almacenada?

24.32 Un capacitor de placas paralelas relleno de aire tiene un área de placa de 2.60×10^{-3} m^2. La magnitud de la carga de cada placa es de 8.20 pC y la diferencia de potencial entre las placas es de 2.40 V. ¿Cuál es la densidad de energía del campo eléctrico en el volumen comprendido entre las placas?

24.33 Un capacitor cilíndrico de aire de 15.0 m de largo almacena 3.20×10^{-9} J de energía cuando la diferencia de potencial entre los dos conductores es de 4.00 V. a) Calcule la magnitud de la carga de cada conductor. b) Calcule la proporción de los radios de los conductores interior y exterior.

24.34 Un capacitor esférico consta de dos corazas conductoras concéntricas separadas por un vacío. La esfera interior tiene un radio de 10.0 cm y la separación entre las esferas es de 1.50 cm. La magnitud de la carga de cada esfera es de 3.30 nC. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos esferas? b) ¿Cuál es la energía de campo eléctrico almacenada en el capacitor?

24.35 Considere el capacitor esférico del ejercicio 24.13. a) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 12.6$ cm, inmediatamente afuera de la esfera interior? b) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 14.7$ cm, inmediatamente adentro de la esfera exterior? c) En un capacitor de placas paralelas la densidad de energía es uniforme en la región comprendida entre las placas, excepto cerca de los bordes de éstas. ¿Ocurre lo mismo en el caso de un capacitor esférico?

24.36 a) Halle la densidad de energía del campo eléctrico en un punto a 12.0 cm de una carga puntual aislada $q = 8.00$ nC. b) Si la carga puntual del inciso (a) fuera $q = -8.00$ nC, ¿qué efecto tendría esto en la densidad de energía del campo eléctrico? Explique su razonamiento.

24.37 Se tienen dos capacitores idénticos y una fuente externa de potencial. a) Compare la energía total almacenada en los capacitores cuando están conectados al potencial aplicado en serie y en paralelo. b) Compare la cantidad máxima de carga almacenada en cada caso. c) El almacenamiento de energía en un capacitor puede estar limitado por el campo eléctrico máximo entre las placas. ¿Cuál es la razón de los campos eléctricos correspondientes a las combinaciones en serie y en paralelo?

Sección 24.4 Dieléctricos

24.38 Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia $C_0 = 5.00$ pF cuando hay aire entre las placas. La separación entre éstas es de 1.50 mm. a) ¿Cuál es la magnitud máxima de carga Q que se puede colocar en cada placa si el campo eléctrico en la región entre las placas no debe exceder los 3.00×10^4 V/m? b) Se inserta entre las placas del capacitor un dieléctrico con $K = 2.70$, ocupando en su totalidad el volumen entre las placas. ¿Cuál es ahora la magnitud máxima de la carga de cada placa si el campo eléctrico entre las placas no debe exceder los 3.00×10^4 V/m?

24.39 Dos placas paralelas tienen cargas iguales y opuestas. Cuando se evacúa el espacio entre las placas, el campo eléctrico es $E = 3.20 \times 10^5$ V/m. Cuando el mismo espacio se llena con dieléctrico, el campo eléctrico es $E = 2.50 \times 10^5$ V/m. a) ¿Cuál es la densidad de carga en cada superficie del dieléctrico? b) ¿Cuál es la constante dieléctrica?

24.40 Dos placas conductoras idénticas, con cargas opuestas y con un área de 2.50 cm^2, están separadas por un dieléctrico de 1.80 mm de espesor con una constante dieléctrica de 3.60. El campo eléctrico resultante en el dieléctrico es de 1.20×10^6 V/m. Calcule a) la carga por unidad de área en la placa conductora; b) la carga por unidad de área en las superficies del dieléctrico; c) la energía total de campo eléctrico almacenada en el capacitor.

24.41 El dieléctrico que se va a utilizar en un capacitor de placas paralelas tiene una constante dieléctrica de 3.60 y una resistencia dieléctrica de 1.60×10^7 V/m. El capacitor debe tener una capacitancia de 1.25×10^{-9} F y debe ser capaz de soportar una diferencia de potencial máxima de 5500 V. ¿Cuál es el área mínima que deben tener las placas del capacitor?

24.42 Demuestre que la ecuación (24.19) es válida con respecto a un capacitor de placas paralelas con un material dieléctrico entre las placas. Utilice una deducción análoga a la que se empleó en el caso de la ecuación (24.11).

24.43 Un capacitor tiene placas paralelas de 12 cm^2 de área con una separación de 2.00 mm. El espacio entre las placas está relleno de poliestireno (véase la tabla 24.2). a) Halle la permitividad del poliestireno. b) Halle el voltaje máximo permisible entre los bornes del capacitor para evitar la ruptura del dieléctrico. c) Cuando el voltaje es igual al hallado en el inciso (b), encuentre la densidad de carga superficial de cada placa y la densidad superficial de carga inducida en la superficie del dieléctrico.

24.44 Se mantiene una diferencia de potencial constante de 12 V entre los bornes de un capacitor en aire entre las placas paralelas de 0.25 μF. a) Se inserta una lámina de Mylar entre las placas del capacitor, de modo que ocupe la totalidad del espacio entre ellas. Una vez hecho esto, ¿cuánta carga adicional fluye hacia la placa positiva del capacitor (véase la tabla 24.1)? b) ¿Cuál es la carga total inducida en cada cara de la lámina de Mylar? c) ¿Qué efecto tiene la lámina de Mylar en el campo eléctrico entre las placas? Explique cómo se puede conciliar este hecho con el aumento de carga de las placas, cuyo efecto es *aumentar* el campo eléctrico.

24.45 Cuando se conecta un capacitor de aire de 360 nF (1 nF = 10^{-9} F) a una fuente de energía, la energía que se almacena en el capacitor es de 1.85×10^{-5} J. a) Mientras se mantiene conectado el capacitor a la fuente de energía, se inserta una placa de dieléctrico que ocupa totalmente el espacio entre las placas. Esto incrementa la energía almacenada en 2.32×10^{-5} J. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor? b) ¿Cuál es la constante dieléctrica de la placa insertada?

24.46 Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia $C = 12.5$ pF cuando el volumen entre las placas está lleno de aire. Las placas son circulares, con un radio de 3.00 cm. Se conecta al capacitor a una batería, y cada placa adquiere una carga cuya magnitud es de 25.0 pC. Con el capacitor todavía conectado a la batería, se inserta una placa de dieléctrico entre las placas, la cual ocupa todo el espacio entre ellas. Después de insertar el dieléctrico la magnitud de la carga de cada placa es de 45.0 pC. a) ¿Cuál es la constante dieléctrica K del dieléctrico? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas antes y después de insertar el dieléctrico? c) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto equidistante de las placas antes y después de insertar el dieléctrico?

24.47 Un capacitor de placas paralelas tiene una carga cuya magnitud es de 9.00×10^{-6} C en cada placa y una capacitancia de 3.00 μF cuando hay aire entre las placas. La separación entre éstas es de 2.00 mm. Manteniendo constante la carga de las placas, se inserta entre ellas un dieléctrico con $K = 5$, el cual ocupa en su totalidad el volumen entre las placas. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor antes y después de insertar el dieléctrico? b) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto equidistante de las placas antes y después de insertar el dieléctrico?

*Sección 24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos

***24.48** Una carga puntual q está incrustada en un material sólido de constante dieléctrica K. a) Con base en la ley de Gauss como se expresa en la ecuación (24.22), halle la magnitud del campo eléctrico debido a la carga puntual a una distancia d de la carga. b) Con base en su resultado del inciso (a) y en la ley de Gauss en su forma original [ecuación (22.8)], determine la carga *total* (libre *y* ligada) dentro de una esfera de radio d centrada en la carga puntual q. c) Halle la carga ligada total dentro de la esfera descrita en el inciso (b).

***24.49** Un capacitor de placas paralelas tiene el volumen entre sus placas lleno con plástico de constante dieléctrica K. La magnitud de la carga de cada placa es Q. Cada placa tiene un área A, y la distancia entre las placas es d. a) Con base en la ley de Gauss como se expresa en la ecuación (24.22), calcule la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico. b) Con base en el campo eléctrico determinado en el inciso (a), calcule la diferencia de potencial entre las dos placas. c) Utilice el resultado del inciso (b) para hallar la capacitancia del capacitor. Compare su resultado con la ecuación (24.12).

Problemas

24.50 Se construye un capacitor con aire entre las placas paralelas con dos placas de 16 cm^2, separadas 4.7 mm, y se conecta a una batería de 12 V. a) ¿Cuál es la capacitancia? b) ¿Cuál es la carga de cada placa? c) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas? d) ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor? e) Si se desconecta la batería y luego se apartan las placas hasta tener una separación de 9.4 mm, ¿cuáles son las respuestas a los incisos (a), (b), (c) y (d)?

24.51 Suponga que la batería del problema 24.50 permanece conectada mientras se separan las placas. ¿Cuáles son entonces las respuestas a los incisos (a), (b), (c) y (d) después de separar las placas?

24.52 Cuatro placas conductoras cuadradas idénticas tienen lados de longitud L. Las cuatro placas yacen paralelas al plano xy, con vértices en $(x, y) = (L/2, L/2)$, $(-L/2, L/2)$, $(L/2, -L/2)$ y $(-L/2, -L/2)$. La placa 1 está en el plano $z = 0$; la placa 2, en el plano $z = d$; la placa 3, en el plano $z = 2d$, y la placa 4, en el plano $z = 3d$, donde $d \ll L$. Las placas 1 y 3 tienen cada una carga positiva Q, y las placas 2 y 4, una carga negativa $-Q$. Hay un vacío entre las placas. a) Halle la energía total almacenada en esta configuración de placas y cargas. b) Ahora se intercambian las placas 2 y 3 sin alterar las cargas de cada una. ¿Cuánto trabajo es preciso realizar para llevar a cabo este intercambio? [*Sugerencia:* Repase los comentarios sobre superposición del ejemplo 21.13 (sección 21.5)].

24.53 Las unidades de destello electrónico para cámaras fotográficas contienen un capacitor para almacenar la energía con la que se produce el destello. En una de estas unidades, el destello dura $\frac{1}{675}$ s con una emisión de potencia lumínica promedio de 2.70×10^5 W. a) Si la conversión de energía eléctrica en luz tiene una eficiencia de 95% (el resto de la energía se transforma en energía térmica), ¿cuánta energía es necesario almacenar en el capacitor para un destello? b) El capacitor tiene una diferencia de potencial entre sus placas de 125 V cuando la energía almacenada tiene el valor calculado en el inciso (a). ¿Cuál es la capacitancia?

24.54 En cierto tipo de teclado de computadora, cada tecla contiene una pequeña placa metálica que actúa como una de las placas de un capacitor de placas paralelas relleno de aire. Cuando se oprime la tecla, la separación entre placas disminuye y la capacitancia aumenta. Los circuitos electrónicos detectan el cambio de capacitancia y de este modo registran que la tecla ha sido oprimida. En un teclado en particular, el área de cada placa metálica es de 42.0 mm^2 y la separación entre las placas es de 0.700 mm antes de oprimir la tecla. Si los circuitos pueden detectar un cambio de capacitancia de 0.250 pF, ¿cuánto se debe oprimir la tecla para que el circuito detecte el hecho?

24.55 Considere un capacitor cilíndrico como el que se muestra en la figura 24.4. Sea $d = r_b - r_a$ la separación entre los conductores interior y exterior. a) Sean los radios de los dos conductores sólo levemente diferentes, de modo que $d \ll r_a$. Demuestre que el resultado deducido en el ejemplo 24.4 (sección 24.1) con respecto a la capacitancia de un capacitor cilíndrico se reduce entonces a la ecuación (24.2), la ecuación de la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, donde A es el área total de cada cilindro. Utilice el resultado según el cual $\ln(1 + z) \cong z$ cuando $|z| \ll 1$. b) No obstante que la Tierra es prácticamente esférica, su superficie nos parece plana porque su radio es muy grande. Con base en esta idea, explique por qué el resultado del inciso (a) es razonable desde un punto de vista puramente geométrico.

24.56 En la figura 24.7a, sean $C_1 = 9.0\ \mu$F, $C_2 = 4.0\ \mu$F y $V_{ab} = 28$ V. Suponga que los capacitores cargados se desconectan de la fuente y uno del otro, en seguida se conectan de nuevo uno con el otro con las placas de signo *opuesto* juntas. ¿Cuánto disminuye la energía del sistema?

24.57 Un capacitor de 4.00 μF y otro de 6.00 μF se conectan en paralelo entre los bornes de una toma de corriente de 600 V. a) Halle la carga de cada capacitor y el voltaje entre los bornes de cada uno. b) Los capacitores cargados se desconectan de toma de corriente y uno del otro, y luego se conectan de nuevo uno con el otro con los bornes de signo diferente juntos. Halle la carga final y el voltaje entre los bornes de cada uno.

24.58 Se dispone de varios capacitores de 0.25 μF. El voltaje entre los bornes de cada uno no debe exceder los 600 V. Se necesita construir un capacitor con una capacitancia de 0.25 μF para ser conectado a través de una diferencia de potencial de 960 V. a) Muestre en un diagrama cómo se puede obtener un capacitor equivalente con las propiedades deseadas. b) Ningún dieléctrico es un aislador perfecto que no permita el flujo de carga alguna a través de su volumen. Suponga que el dieléctrico de uno de los capacitores de su diagrama es un conductor moderadamente bueno. ¿Qué ocurrirá en este caso cuando se conecte su combinación de capacitores a través de la diferencia de potencial de 960 V?

24.59 En la figura 24.24, $C_1 = C_5 = 8.4\ \mu$F y $C_2 = C_3 = C_4 = 4.2\ \mu$F. El potencial aplicado es $V_{ab} = 220$ V. a) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la red entre los puntos a y b? b) Calcule la carga de cada capacitor y la diferencia de potencial entre los bornes de cada uno.

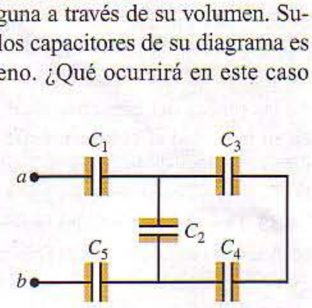


Figura 24.24 Problema 24.59.

24.60 Los capacitores de la figura 24.25 están inicialmente sin carga y conectados, como indica el diagrama, con el interruptor S abierto. La diferencia de potencial aplicada es $V_{ab} = +210$ V. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{cd}? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de cada capacitor después de cerrar el interruptor S? c) ¿Cuánta carga fluyó a través del interruptor cuando éste se cerró?

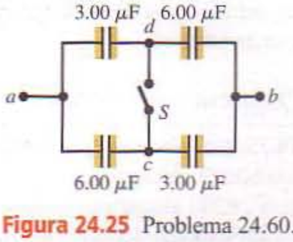


Figura 24.25 Problema 24.60.

24.61 Tres capacitores con capacitancias de 8.4, 8.4 y 4.2 μF están conectados en serie a través de una diferencia de potencial de 36 V. a) ¿Cuál es la carga del capacitor de 4.2 μF? b) ¿Cuál es la energía total almacenada en los tres capacitores? c) Se desconectan los capacitores de la diferencia de potencial sin permitir que se descarguen, y después se conectan de nuevo en paralelo con las placas con carga positiva conectadas unas con otras. ¿Cuál es el voltaje entre los bornes de cada capacitor en la combinación en paralelo? d) ¿Cuál es la energía total que ahora está almacenada en los capacitores?

24.62 Un capacitor de 4.00 μF y otro de 6.00 μF se conectan en serie a través de una toma de corriente de 660 V. a) Halle la carga de cada capacitor y el voltaje entre sus bornes. b) Los capacitores cargados se desconectan de la toma de corriente y uno del otro y se conectan de nuevo con los bornes del mismo signo juntos. Halle la carga final y el voltaje entre los bornes de cada uno.

24.63 En la figura 24.26, cada capacitancia C_1 es de 6.9 μF, y cada capacitancia C_2, de 4.6 μF. a) Calcule la capacitancia equivalente de la red entre los puntos a y b. b) Calcule la carga de cada uno de los tres capacitores más próximos a a y b cuando $V_{ab} = 420$ V. c) Con 420 V entre a y b, calcule V_{cd}.

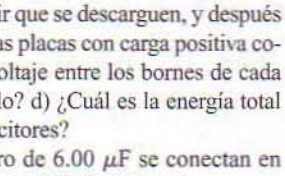


Figura 24.26 Problema 24.63.

24.64 Cada combinación de capacitores entre los puntos a y b de la figura 24.27 se conecta primero entre los bornes de una batería de 120 V para cargar la combinación a 120 V. Estas combinaciones se conectan después para formar los circuitos que se muestran. Cuando se acciona el interruptor S, fluye una oleada de carga de los capacitores que se descargan, la cual activa el dispositivo de señal. ¿Cuánta carga fluye a través del dispositivo de señal?

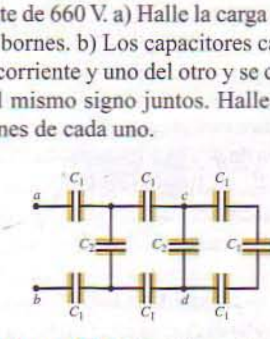


Figura 24.27 Problema 24.64.

24.65 Un capacitor de placas paralelas que tiene sólo aire entre las placas se carga conectándolo a una batería. El capacitor se desconecta luego de la batería, sin que las placas pierdan nada de carga. a) Un voltímetro muestra una lectura de 45.0 V cuando se coloca entre los bornes del capacitor. Cuando se inserta entre las placas un dieléctrico que ocupa todo el espacio, la lectura del voltímetro es de 11.5 V. ¿Cuál es la constante dieléctrica de este material? b) ¿Cuál será la lectura del voltímetro si ahora se retira parcialmente el dieléctrico de modo que ocupe sólo un tercio del espacio entre las placas?

24.66 Se construye un capacitor de aire con dos placas planas, cada una con un área A, separadas por una distancia d. Después se inserta entre las placas una placa metálica de un espesor a (menor que d) y de la misma forma y tamaño que las placas, paralela a éstas y sin tocar ninguna de ellas (Fig. 24.28). a) ¿Cuál es la capacitancia de esta configuración? b) Exprese la capacitancia como un múltiplo de la capacitancia C_0 en ausencia de la placa metálica. c) Comente qué le ocurre a la capacitancia en los límites $a \rightarrow 0$ y $a \rightarrow d$.

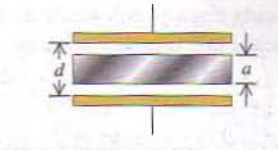


Figura 24.28 Problema 24.66.

24.67 Capacitancia de la Tierra. a) Comente cómo se puede aplicar también el concepto de capacitancia a un *solo* conductor. (*Sugerencia:* En la relación $C = Q/V_{ab}$, piense que el segundo conductor se encuentra en el infinito). b) Con base en la ecuación (24.1), demuestre que $C = 4\pi\epsilon_0 R$ en el caso de una esfera conductora sólida de radio R. c) Con base en su resultado del inciso (b), calcule la capacitancia de la Tierra, que es un buen conductor de 6380 km de radio. Compárela con los capacitores típicos que se utilizan en circuitos electrónicos, los cuales tienen capacitancias que fluctúan entre 10 pF y 100 μF.

24.68 Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga Q. Calcule la densidad de energía del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de la esfera cuando a) $r < R$; b) $r > R$. c) Calcule la energía total de campo eléctrico asociada con la esfera con carga. (*Sugerencia:* Considere una coraza esférica de radio r y espesor dr, cuyo volumen es $dV = 4\pi r^2\, dr$, y encuentre la energía almacenada en este volumen. Después integre de $r = 0$ a $r \rightarrow \infty$). d) Explique por qué se puede interpretar el resultado del inciso (c) como la cantidad de trabajo que se requiere para reunir la carga Q en la esfera. e) Con base en la ecuación (24.9) y el resultado del inciso (c), demuestre que la capacitancia de la esfera es como se indica en el problema 24.67.

24.69 Una esfera con carga uniforme y de radio R tiene una carga total Q, como se describe en el ejemplo 22.9 (sección 22.4). Calcule la densidad de energía del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de la esfera cuando a) $r < R$; b) $r > R$. c) Calcule la energía total de campo eléctrico. (Véase la sugerencia del inciso (c) del problema 24.68).

24.70 El cilindro interior de un capacitor cilíndrico largo tiene un radio r_a y una densidad de carga lineal $+\lambda$. Está rodeado de una coraza conductora cilíndrica coaxial con un radio interior r_b y una densidad de carga lineal $-\lambda$ (Fig. 24.4). a) ¿Cuál es la densidad de energía en la región comprendida entre los conductores a una distancia r del eje? b) Integre la densidad de energía calculada en el inciso (a) con respecto al volumen entre los conductores, en una longitud L del capacitor, para obtener la energía total de campo eléctrico por unidad de longitud. c) Con base en la ecuación (24.9) y la capacitancia por unidad de longitud calculada en el ejemplo 24.4 (sección 24.1), calcule U/L. ¿Concuerda su resultado con el obtenido en el inciso (b)?

24.71 El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos placas de dieléctrico, uno con constante K_1 y el otro con constante K_2 (Fig. 24.29). El espesor

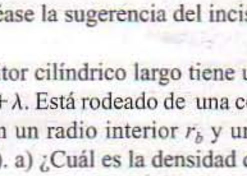


Figura 24.29 Problema 24.71.

de cada placa es $d/2$, donde d es la separación entre las placas. Demuestre que la capacitancia es

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right)$$

24.72 El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos placas de dieléctrico, uno con constante K_1 y el otro con constante K_2 (Fig. 24.30). El espesor de cada placa es igual que la separación d entre las placas, y cada placa ocupa la mitad del volumen entre las placas. Demuestre que la capacitancia es

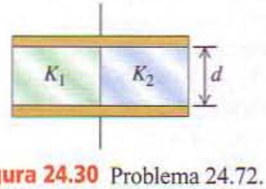


Figura 24.30 Problema 24.72.

$$C = \frac{\epsilon_0 A(K_1 + K_2)}{2d}$$

24.73 Células humanas. Ciertas paredes celulares del cuerpo humano tienen una capa de carga negativa en la superficie interna y una capa de carga positiva de igual magnitud en la superficie externa. Suponga que las densidades de carga superficiales son de $\pm 0.5 \times 10^{-3}$ C/m^2, la pared celular tiene un espesor de 5.0×10^{-9} m y el material de la pared celular tiene una constante dieléctrica $K = 5.4$. a) Halle la magnitud de $\vec{E}$ en la pared entre las dos capas de carga. b) Halle la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula. ¿Cuál está al potencial más alto? c) Una célula representativa en el cuerpo humano tiene un volumen de 10^{-16} m^3. Estime la energía total de campo eléctrico almacenada en la pared de una célula de este tamaño. (*Sugerencia:* Suponga que la célula es esférica y calcule el volumen de la pared celular).

24.74 Suponga que el capacitor de placas paralelas descrito en los ejemplos 24.10 y 24.11 (sección 24.4) permanece conectado a la fuente de energía de 3000 V mientras se inserta entre las placas una hoja de plástico aislante con $K = 2.50$, la cual ocupa en su totalidad el espacio entre ellas. Calcule a) la magnitud de la carga Q de cada placa después de insertar el dieléctrico; b) la magnitud de la carga inducida Q_i en cada cara del dieléctrico; c) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico; d) la energía total almacenada en el campo eléctrico después de insertar el dieléctrico; e) la densidad de energía después de insertar el dieléctrico. f) En el inciso (d) usted debió haber hallado que la energía almacenada *aumentó* al insertar el dieléctrico, en tanto que en el ejemplo 24.11 la energía almacenada *disminuyó* al hacer lo mismo. ¿Por qué hay una diferencia entre los dos casos? En el presente caso, ¿de dónde proviene la energía adicional?

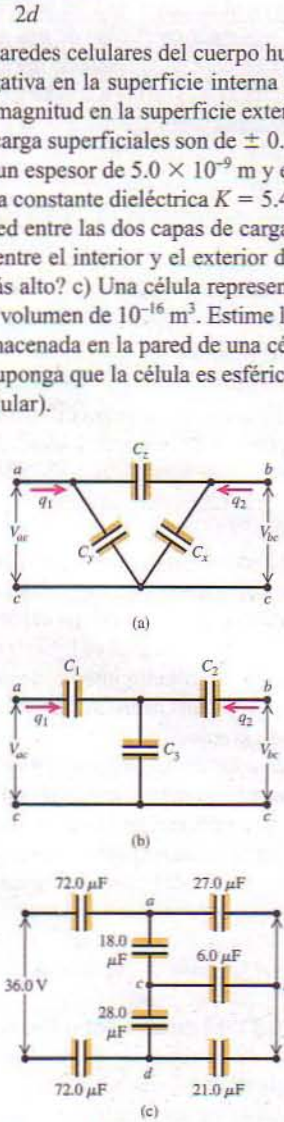


Figura 24.31 Problema de desafío 24.75.

Problemas de desafío

24.75 No siempre es posible agrupar los capacitores de una red en combinaciones simples en serie o en paralelo. Como ejemplo, la figura 24.31a muestra tres capacitores C_x, C_y y C_z en una *red en delta*, así llamada debido a su forma triangular. Esta red tiene *tres* bornes a, b y c y, por tanto, no se puede transformar en un solo capacitor equivalente. Se puede demostrar que, en lo tocante a cualquier efecto sobre el circuito externo, una red delta es equivalente a lo que se conoce como *red en estrella*. Por ejemplo, la red en delta de la figura 24.31a se puede sustituir por la red en estrella de la figura 24.31b. (El nombre de "red en estrella" también se refiere a la forma de la red.) a) Demuestre que las ecuaciones de transformación que dan C_1, C_2 y C_3 en términos de C_x, C_y y C_z son

$$C_1 = (C_xC_y + C_yC_z + C_zC_x)/C_x$$
$$C_2 = (C_xC_y + C_yC_z + C_zC_x)/C_y$$
$$C_3 = (C_xC_y + C_yC_z + C_zC_x)/C_z$$

(*Sugerencia:* La diferencia de potencial V_{ac} debe ser la misma en ambos circuitos, como debe serlo V_{bc}. Además, la carga q_1 que fluye del punto a a lo largo del alambre como se indica debe ser la misma en ambos circuitos, al igual que q_2. Obtenga una relación de V_{ac} en función de q_1 y q_2 y las capacitancias de cada red, y obtenga otra relación de V_{bc} en función de las cargas de cada red. Los coeficientes de las ecuaciones correspondientes deben ser los mismos con respecto a ambas redes). b) Con respecto a la red que se muestra en la figura 24.31c, determine la capacitancia equivalente entre los bornes del lado izquierdo de la red. (*Sugerencia:* Utilice la transformación delta-estrella deducida en el inciso (a). Forme la delta con los puntos a, b y c, y transforme la delta en una estrella. En estas condiciones se pueden combinar los capacitores mediante las relaciones correspondientes a combinaciones de capacitores en serie y en paralelo). c) Determine las cargas de cada capacitor de la figura 24.31c, así como las diferencias de potencial entre los bornes de cada uno.

24.76 El capacitor con aire entre las placas paralelas de la figura 24.32 consiste en dos placas conductoras horizontales de áreas iguales A. La placa inferior descansa sobre un soporte fijo y la placa superior está suspendida de cuatro resortes con constante de elasticidad k, situados en cada uno de los cuatro vértices de la placa superior, como se muestra en la figura. Cuando no tienen carga, las placas están separadas por una distancia z_0. Se conecta una batería a las placas, la cual crea una diferencia de potencial V entre ellas. Esto provoca que la separación de placas disminuya a z. No tome en cuenta los efectos de pestañeo. a) Demuestre que la magnitud de la fuerza electrostática entre las placas con carga es $\epsilon_0 AV^2/2z^2$. (*Sugerencia:* Vea el ejerci-

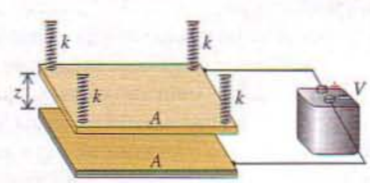


Figura 24.32 Problema de desafío 24.76.

cio 24.29.) b) Obtenga una expresión que relacione la separación de placas z con la diferencia de potencial V. La ecuación resultante será cúbica con respecto a z. c) Dados los valores $A = 0.300\ \text{m}^2$, $z_0 = 1.20$ mm, $k = 25.0$ N/m y $V = 120$ V, halle los dos valores de z con los que la placa superior estará en equilibrio. (*Sugerencia:* Puede resolver la ecuación cúbica insertando un valor de ensayo de z en la ecuación para después ajustar su conjetura hasta que se satisfaga la ecuación a tres cifras significativas. Localizar gráficamente las raíces de la ecuación cúbica le facilitará la elección de valores iniciales de z para este procedimiento prueba y error. Una de las raíces de la ecuación cúbica tiene un valor negativo no físico). d) Con respecto a cada uno de los valores de z hallados en el inciso (c), ¿es el equilibrio estable o inestable? En un equilibrio estable un pequeño desplazamiento del objeto dará origen a una fuerza neta que tenderá a devolver el objeto a la posición de equilibrio. En un equilibrio inestable un desplazamiento pequeño da origen a una fuerza neta que aleja aún más el objeto respecto al equilibrio.

24.77 Dos placas conductoras cuadradas con lados de longitud L están sepaparadas por una distancia D. Se inserta una placa dieléctrica con constante K y dimensiones $L \times L \times D$ una distancia x en el espacio entre las placas, como se muestra en la figura 24.33. a) Halle la capacitancia C de este sistema (vea el problema 24.72). b) Suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V entre las placas. Si se inserta la placa dieléctrica a una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, demuestre que el cambio de energía almacenada es

Figura 24.33 Problema de desafío 24.77.

$$dU = +\frac{(K-1)\epsilon_0 V^2 L}{2D}dx$$

c) Suponga que, antes de desplazar la placa la distancia dx, se desconectan las placas de la batería para que las cargas de las placas permanezcan constantes. Determine la magnitud de la carga de cada placa, y luego demuestre que, cuando la placa se introduce una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, la energía almacenada cambia en una cantidad que es el *negativo* de la expresión de dU dada en el inciso (b). d) Si F es la fuerza que las cargas de las placas ejercen sobre la placa, entonces dU debe ser igual al trabajo realizado *contra* esta fuerza para desplazar la placa una distancia dx. De este modo, $dU = -F\,dx$. Demuestre que la aplicación de esta expresión al resultado del inciso (b) sugiere que la fuerza eléctrica sobre la placa empuja a ésta hacia *afuera* del capacitor, en tanto que el resultado del inciso (c) sugiere que la fuerza jala de la placa hacia *adentro* del capacitor. e) La figura 25.14 muestra que, de hecho, la fuerza jala de la placa hacia adentro del capacitor. Explique por qué el resultado del inciso (b) indica incorrectamente la dirección de la fuerza y calcule la magnitud de ésta. (Este método no demanda conocer la naturaleza del pestañeo del campo).

24.78 Un capacitor esférico aislado tiene una carga $+Q$ en su conductor interior (radio r_a) y una carga $-Q$ en su conductor exterior (radio r_b). La mitad del volumen entre los dos conductores se llena luego con un dieléctrico líquido de constante K, como se muestra en corte transversal en la figura 24.34. a) Halle la capacitancia del capacitor lleno a la mitad. b) Halle la magnitud de $\vec{E}$ en el volumen entre los dos conductores en función de la distancia r al centro del capacitor. Proporcione respuestas con respecto a las mitades tanto superior como inferior de este volumen. c) Halle la densidad de carga superficial libre en las mitades superior e inferior de los conductores interior y exterior. d) Halle la densidad de carga superficial ligada de las superficies interna ($r = r_a$) y externa ($r = r_b$) del dieléctrico. e) ¿Cuál es la densidad de carga superficial ligada en la superficie plana del dieléctrico? Explique su respuesta.

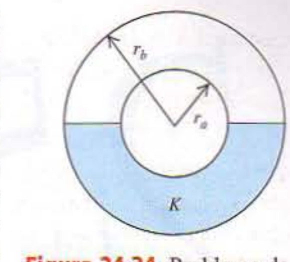


Figura 24.34 Problema de desafío 24.78.

24.79 Tres placas metálicas cuadradas A, B y C, cada una de 12.0 por lado y 1.50 mm de espesor, están dispuestas como en la figura 24.35. Las placas están separadas por hojas de papel de 0.45 mm de espesor y constante dieléctrica 4.2. Las placas exteriores están conectadas una con otra y también al punto b. La placa interior está conectada al punto a. a) Copie el diagrama y muestre los signos más y menos de la distribución de carga en las placas cuando el punto a se mantiene a un potencial positivo con respecto al punto b. b) ¿Cuál es la capacitancia entre los puntos a y b?

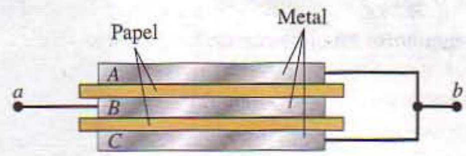


Figura 24.35 Problema de desafío 24.79.

24.80 Un medidor de combustible se vale de un capacitor para determinar la altura del combustible en un tanque. La constante dieléctrica efectiva K_{ef} cambia de un valor de 1 cuando el tanque está vacío a un valor de K, la constante dieléctrica del combustible, cuando el tanque está lleno. Los circuitos electrónicos apropiados determinan la constante dieléctrica efectiva del aire y el combustible combinados entre las placas del capacitor. Cada una de las dos placas rectangulares tiene una anchura w y una longitud L (Fig. 24.36). La altura del combustible entre las placas es h. Se pueden pasar por alto los efectos de pestañeo. a) Deduzca una expresión de K_{ef} en función de h. b) ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva de un tanque a la cuarta parte, a la mitad y a las tres cuartas partes si el combustible es gasolina ($K = 1.95$)? c) Repita el inciso (b) con metanol ($K = 33.0$). d) ¿Con respecto a cuál combustible resulta más práctico este medidor?

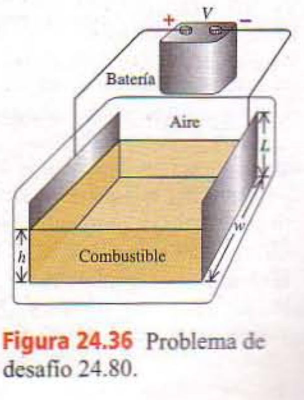


Figura 24.36 Problema de desafío 24.80.